

ARCHIVES OF MATHEMATICS

# ARCHIV DER MATHEMATIK

ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Begründet von W. SÜSS

Herausgegeben in Verbindung mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach  
von R. BAER · H. KNESER

Beirat: G. BOL, E. BOMPIANI, J. DIEUDONNÉ, CH. EHRESMANN, W. FELLER,  
H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, H. KÖNIG, S. MACLANE, W. MAGNUS,  
T. NAGELL, CHR. PAUC, G. PICKERT, K. REIDEMEISTER, P. ROQUETTE, J. A. SCHOUTEN,  
H. SEIFERT, E. SPERNER, E. STIEFEL, P. TURÁN

Schriftleitung: E. LAMPRECHT

## INHALT — CONTENTS — SOMMAIRE

HUPPERT, B.: Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen . . . . .	161
KEGEL, O. H.: Nicht-einfache Partitionen endlicher Gruppen . . . . .	170
HEINEKEN, H.: Über ein Levisches Nilpotenzkriterium . . . . .	176
FAITH, C.: Rings with Minimum Condition on Principal Ideals II . . . . .	179
HAUSNER, A.: On the Quadratic Reciprocity Theorem . . . . .	182
RIEGER, G. J.: Das große Sieb von LINNIK für algebraische Zahlen . . . . .	184
GORENFLO, R.: Über die singulären Stellen der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen . . . . .	188
HEINRICH, H.: Ein Beitrag zur Lokalisierung von $n$ -Tupeln von Elementen im euklidischen Raum, insbesondere in der komplexen Zahlenebene . . . . .	193
LIU, TENG-SUN and WANG, JU-KWAI: On the Lattice of Normal Functions on a Totally Disconnected Compact Space . . . . .	202
NEUGEBAUER, C. J.: A Class of Functions Determined by Dense Sets . . . . .	206
BAUER, H.: Supermartingale und Choquet-Rand . . . . .	210
BIERLEIN, D.: Eine Bemerkung zur diskreten gemischten Erweiterung eines unendlichen Spieles . . . . .	224
EBERL, W.: Verbandstheoretische Verallgemeinerung der Poincaréschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	227
RINGEL, G.: Über eine Klasseneinteilung der zweiecklosen Graphen . . . . .	231
BÖHM, W.: Die Konstruktion der Minimalfläche von ENNEPER . . . . .	238

ARCH. MATH.	VOL. XII	FASC. 3	PAG. 161—240	1. VII. 1961
-------------	----------	---------	--------------	--------------

IRK HÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART



ARCHIV DER MATHEMATIK  
ARCHIVES OF MATHEMATICS — ARCHIVES MATHÉMATIQUES

Adresse der Redaktion: Würzburg (Deutschland), Klinikstraße 6

---

Das *Archiv der Mathematik* erscheint regelmäßig alle 2 Monate mit jährlich 6 Heften. Der Bezugspreis beträgt für den ganzen Band Fr. 66.— (DM 66.—) und für das Einzelheft Fr. 14.— (DM 14.—). Mitglieder einer der nachstehend genannten Gesellschaften erhalten hierauf 20% Rabatt: *Canadian Mathematical Congress* · *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* · *Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik* · *Het Wiskundig Genootschap te Amsterdam* · *Indian Mathematical Society* · *Matematisk Forening i København* · *Norsk Matematisk Forening* · *Österreichische Mathematische Gesellschaft* · *Polskie Towarzystwo Matematyczne* · *Schweizerische Mathematische Gesellschaft* · *Sociedad Matemática Española* · *Société Mathématique de France* · *The American Mathematical Society* · *The Edinburgh Mathematical Society* · *The London Mathematical Society* · *The Mathematical Association of America* · *Unión Matemática Argentina* · *Unione Matematica Italiana*.

Veröffentlicht werden in erster Linie *Originalarbeiten* aus dem Gesamtgebiet der *Mathematik* und ihrer unmittelbaren Anwendungen. In beschränktem Maße können auch *Selbstreferate* über bislang unveröffentlichte größere Arbeiten, deren wissenschaftliche Bedeutung dies gerechtfertigt erscheinen läßt, Aufnahme finden. In diesen Selbstreferaten müssen außer den Resultaten die wesentlichen Schritte der Beweisführung mitgeteilt werden. Schließlich gelangen in zwangloser Folge *Zusammenfassende Berichte* über die Fortschritte einzelner Sondergebiete, die in rascher Entwicklung begriffen sind, mit ausführlichen Literaturangaben zum Abdruck.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache abgefaßt sein und sollen an Umfang 10 Druckseiten nicht überschreiten. Die Autoren werden gebeten, die Manuskripte in Maschinenschrift mit handschriftlich eingetragenen Formeln einzureichen und ihnen separat eine «Anweisung für den Setzer» beizufügen, aus der zu ersehen ist, wie kursiver, gesperrter oder fetter Satz, Kleindruck und griechische, Fraktur-, Antiqua- und sonstige Typen durch farbige Unterstreichungen kenntlich gemacht sind. Die Vorlagen für Abbildungen müssen reproduktionsfertig und mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden. Beschriftung der Abbildung jedoch nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier. Nicht durch die Druckerei verschuldete Autorkorrekturen, welche 10% der reinen Satzkosten übersteigen, werden den betreffenden Autoren belastet.

Eine Honorierung der Beiträge erfolgt nicht. Den Verfassern werden 75 Separata ohne Umschlag gratis überlassen; weitere Fortdrucke bzw. Umschläge für Separata, sofern ihre Bestellung bei Rückgabe der Korrektur aufgegeben wird, können gegen folgende Berechnung geliefert werden: Je 25 Fortdrucke DM 0,80 pro Seite (ohne Umschlag); erste 25 Umschläge DM 18.—, je weitere 25 Umschläge DM 6.—.

*Redaktionsschluß* spätestens 3 Monate vor Erscheinungstermin des jeweiligen Heftes. Sämtliche *Zuschriften* sind an die obengenannte Adresse der Redaktion erbeten.

*Inserate*: 1/1 Seite Fr. (DM) 175.—, 1/2 Seite Fr. (DM) 90.—, 1/4 Seite Fr. (DM) 50.—.

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photomechanischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. © Birkhäuser Verlag Basel 1961.

Gesamtherstellung: Konrad Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg

---

Die Auslieferung dieser Zeitschrift erfolgt für Deutschland durch den Birkhäuser Verlag, Stuttgart Olgastraße 53 und für alle übrigen Staaten durch den Birkhäuser Verlag in Basel.



## Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen

Von

BERTRAM HUPPERT

Sei  $\mathfrak{G}$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $|\mathfrak{G}| = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ . Als ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$  bezeichnen wir nach P. HALL ein System von Untergruppen  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  von  $\mathfrak{G}$  mit  $|\mathfrak{P}_i| = p_i^{\alpha_i}$  und  $\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j \mathfrak{P}_i$ . Dann ist bekanntlich  $\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ ; wir sagen:  $\mathfrak{P}_i$  und  $\mathfrak{P}_j$  sind als Ganzes vertauschbar. Grundlegend für die Theorie der auflösbaren Gruppen ist der folgende Satz von P. HALL (P. HALL [2]):

*Genau dann ist  $\mathfrak{G}$  auflösbar, wenn  $\mathfrak{G}$  ein Sylowsystem besitzt.*

Die folgende, daran anschließende Frage verdanke ich Frau O. TAUSSKY-TODD: Sei  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$  und es sei für alle Paare  $i, j$  mit  $i \neq j$  jede Untergruppe von  $\mathfrak{P}_i$  als Ganzes mit jeder Untergruppe von  $\mathfrak{P}_j$  vertauschbar. Was läßt sich dann über die Struktur von  $\mathfrak{G}$  aussagen? Allgemeiner kann man fragen, wie die Normalstruktur von  $\mathfrak{G}$  mit der Vertauschbarkeit von Untergruppen der  $\mathfrak{P}_i$  zusammenhängt. Wir beweisen hier die folgenden Sätze:

**Satz 1.** a) Sei  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$ . Sei  $k$  eine natürliche Zahl mit  $1 < k < p$ . Für jedes  $i$  sei das  $k$ -te Glied der absteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}_i$  mit jedem  $\mathfrak{P}_j$  als Ganzes vertauschbar. Dann hat  $\mathfrak{G}$  die  $p$ -Länge 1 für jede Primzahl  $p$  (zum Begriff der  $p$ -Länge siehe HALL-HIGMAN [3]).

b) Für alle  $i, j$  sei jedes Glied der aufsteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}_i$  als Ganzes vertauschbar mit  $\mathfrak{P}_j$ . Dann hat  $\mathfrak{G}$  die  $p$ -Länge 1 für jedes  $p$ .

c) Hat umgekehrt  $\mathfrak{G}$  die  $p$ -Länge 1 für jede Primzahl  $p$  und ist  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$ , so ist jede charakteristische Untergruppe von  $\mathfrak{P}_i$  mit jeder charakteristischen Untergruppe von  $\mathfrak{P}_j$  als Ganzes vertauschbar.

**Satz 2.** Sei  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$ . Für alle  $i, j$  sei jede maximale Untergruppe von  $\mathfrak{P}_i$  mit jedem  $\mathfrak{P}_j$  als Ganzes vertauschbar. Sei  $K_\infty(\mathfrak{G})$  der kleinste Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  mit nilpotenter Faktorgruppe. Dann gilt

(1)  $K_\infty(\mathfrak{G})$  ist nilpotent.

(2) Ordnung und Index von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  sind teilerfremd.

(3) Ist  $\mathfrak{P}$  eine Sylowgruppe von  $K_\infty(\mathfrak{G})$ ,  $G$  irgendein Element von  $\mathfrak{G}$ , so gilt

$$P^G \equiv P^{n(G)} \pmod{\Phi(\mathfrak{P})}$$

für alle  $P \in \mathfrak{P}$  mit einem von  $P$  unabhängigen  $n(G)$ .

Sind umgekehrt (1)–(3) erfüllt, so sind für jedes Sylowsystem  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  von  $\mathfrak{G}$  und alle  $i, j$  alle maximalen Untergruppen von  $\mathfrak{P}_i$  mit  $\mathfrak{P}_j$  als Ganze vertauschbar.



**Satz 3.** Sei  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$ . Für alle  $i, j$  sei jeder Normalteiler von  $\mathfrak{P}_i$  mit  $\mathfrak{P}_j$  als Ganzes vertauschbar. Neben den Aussagen (1)–(3) von Satz 2 gilt dann noch

(4) Aufsteigende und absteigende Zentralreihe von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  stimmen — abgesehen von der Bezifferung — überein.

**Satz 4.** Unter der schärferen Voraussetzung, daß für  $i \neq j$  jede Untergruppe von  $\mathfrak{P}_i$  mit jedem  $\mathfrak{P}_j$  als Ganzes vertauschbar ist, erhalten wir neben (1) und (2) noch

(3')  $K_\infty(\mathfrak{G})$  ist abelsch; zu jedem Element  $G$  aus  $\mathfrak{G}$  gibt es eine nur von  $G$  abhängige natürliche Zahl  $n(G)$  derart, daß für alle  $K \in K_\infty(\mathfrak{G})$  gilt

$$K^G = K^{n(G)}.$$

Erfüllt umgekehrt  $\mathfrak{G}$  die Bedingungen (1), (2) und (3'), so ist für jedes Sylowsystem  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$  von  $\mathfrak{G}$  und für  $i \neq j$  jede Untergruppe von  $\mathfrak{P}_i$  mit jeder Untergruppe von  $\mathfrak{P}_j$  als Ganzes vertauschbar.

Mit genügend scharfen Vertauschbarkeitsvoraussetzungen läßt sich natürlich auch die  $p$ -Auflösbarkeit von  $\mathfrak{G}$  erzwingen. So gilt etwa:

**Satz 5.** Sei  $\mathfrak{P}$  eine  $p$ -Sylowgruppe und  $\mathfrak{Q}$  ein  $p$ -Komplement von  $\mathfrak{G}$ . Es sei  $|\mathfrak{P}| > p$  und jede maximale Untergruppe von  $\mathfrak{P}$  sei als Ganzes mit  $\mathfrak{Q}$  vertauschbar. Dann ist  $\mathfrak{G}$   $p$ -auflösbar. (Für  $p = 2$  ist die Voraussetzung  $|\mathfrak{P}| > 2$  natürlich unnötig.)

Dem Beweis von Satz 1 schicken wir zwei Hilfssätze voraus:

**Hilfssatz 1.** Es sei  $\mathfrak{G}$  eine  $p$ -auflösbare Gruppe mit der  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  und dem  $p$ -Komplement  $\mathfrak{Q}$ . Das  $k$ -te Glied  $K_k(\mathfrak{P})$  der absteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}$  sei für ein  $k$  mit  $1 < k < p$  mit  $\mathfrak{Q}$  als Ganzes vertauschbar. Dann hat  $\mathfrak{G}$  die  $p$ -Länge 1.

**Beweis.** Die Voraussetzung überträgt sich offenbar auf alle homomorphen Bilder von  $\mathfrak{G}$ . Sei  $\mathfrak{G}$  ein Gegenbeispiel von kleinster Ordnung. Wir beweisen nacheinander:

(1)  $\mathfrak{G}$  besitzt nur einen minimalen Normalteiler; dieser ist eine  $p$ -Gruppe:

Sei  $\mathfrak{N}$  ein minimaler Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ . Dann ist  $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = 1$ . Aus  $l_p(\mathfrak{G}) > 1$  folgt, daß  $\mathfrak{N}$  eine  $p$ -Gruppe ist.

Ist  $\mathfrak{M}$  ein weiterer minimaler Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ , so haben wir  $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}) = 1$  und  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{G}$ . Nun ist  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$  isomorph zu einer Untergruppe des direkten Produktes  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{M} \times \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ . Aus  $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}) = 1$  folgt  $l_p(\mathfrak{H}) = 1$  und dann auch  $l_p(\mathfrak{G}) = 1$ , entgegen der Wahl von  $\mathfrak{G}$  als Gegenbeispiel. Also hat  $\mathfrak{G}$  nur einen einzigen minimalen Normalteiler  $\mathfrak{N}$ .

(2)  $\mathfrak{N}$  besitzt ein Komplement  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{G}$ :

Sei  $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$  der größte Normalteiler von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  von zu  $p$  teilerfremder Ordnung. Ist  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ , so folgt aus  $l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = 1$ , daß  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  eine invariante  $p$ -Sylowgruppe hat. Da  $\mathfrak{N}$  eine  $p$ -Gruppe ist, überträgt sich dies auf  $\mathfrak{G}$ , entgegen  $l_p(\mathfrak{G}) > 1$ .

Also ist  $\mathfrak{M} > \mathfrak{N}$ . Da die Ordnung von  $\mathfrak{N}$  und der Index von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{M}$  teilerfremd sind, gibt es bekanntlich eine Untergruppe  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{M}$  mit  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{G}$ ; wegen der Auflösbarkeit von  $\mathfrak{N}$  sind alle solchen Untergruppen  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{M}$  konjugiert



(ZASSENHAUS [7], S. 125/26). Für jedes  $G \in \mathfrak{G}$  haben wir daher  $\mathfrak{S}^G < \mathfrak{N}$ , also  $\mathfrak{S}^G = \mathfrak{S}^N$  für ein geeignetes Element  $N$  aus  $\mathfrak{N}$ . Daraus folgt  $GN^{-1} \in N(\mathfrak{S})$ , also  $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}N(\mathfrak{S})$ .

Es ist  $N(\mathfrak{S}) < \mathfrak{G}$ ; denn sonst wäre  $\mathfrak{S} < \mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{S}$  würde einen von  $\mathfrak{N}$  verschiedenen minimalen Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  enthalten, entgegen der Aussage in (1). Der Durchschnitt  $\mathfrak{D} = \mathfrak{N} \cap N(\mathfrak{S})$  ist invariant in  $N(\mathfrak{S})$ , ist aber auch invariant bei Transformation mit Elementen aus  $\mathfrak{N}$ , da  $\mathfrak{N}$  abelsch ist. Also haben wir  $\mathfrak{D} < \mathfrak{G}$ . Aus  $\mathfrak{D} = \mathfrak{N}$  würde  $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}N(\mathfrak{S}) = N(\mathfrak{S})$  folgen, was aber nicht stimmt. Also ist  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ , somit  $\mathfrak{R} = N(\mathfrak{S})$  ein Komplement von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{G}$ .

(3)  $\mathfrak{N}$  ist eigener Zentralisator in  $\mathfrak{G}$ :

Sei  $C(\mathfrak{N})$  der Zentralisator von  $\mathfrak{N}$  in  $\mathfrak{G}$ . Dann ist  $C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N} \times \mathfrak{Z}$  mit  $\mathfrak{Z} = C(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{R}$ . Da  $C(\mathfrak{N})$  in  $\mathfrak{G}$  normal ist, haben wir  $\mathfrak{Z} \trianglelefteq \mathfrak{R}$ . Sicher ist  $\mathfrak{Z}$  auch invariant bei Transformation mit Elementen aus  $\mathfrak{N}$ . Daher folgt  $\mathfrak{Z} < \mathfrak{N}\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$ . Aus (1) erhalten wir nun  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$ , also  $C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ .

(4)  $\mathfrak{N}$  liegt nicht in der Frattini-Gruppe  $\Phi(\mathfrak{G})$  von  $\mathfrak{G}$ :

Angenommen es sei doch  $\mathfrak{N} \leq \Phi(\mathfrak{G})$ . Aus  $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{R}$  folgt dann  $\mathfrak{G} = \Phi(\mathfrak{G})\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ , entgegen  $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ .

(5) Abschluß des Beweises.

Wir setzen  $K_k(\mathfrak{P}) = \mathfrak{Z}$ . Nach unserer Voraussetzung ist  $\mathfrak{Z}\mathfrak{Q}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ . Wegen  $\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$  ist  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{Q} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{Z}\mathfrak{Q}$ . Aber  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}$  ist offenbar auch invariant in  $\mathfrak{P}$ . Somit gilt  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} < \mathfrak{G}$ . Da  $\mathfrak{N}$  ein minimaler Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  ist, folgt  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$ . Im ersten Falle erhalten wir  $(\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}) \leq \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ , also  $\mathfrak{Z} \leq C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$  und dann  $\mathfrak{Z} = K_k(\mathfrak{P}) = \mathfrak{E}$ . Die Klasse von  $\mathfrak{P}$  ist daher höchstens  $k - 1$ . Nach HALL-HIGMAN [3] hat dann  $\mathfrak{P}$  wegen  $k < p$  die  $p$ -Länge 1.

Sei nun  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$ , also  $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{Z}$ . Wegen  $\mathfrak{Z} \leq \Phi(\mathfrak{P})$  und  $\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$  folgt daraus leicht  $\mathfrak{N} \leq \Phi(\mathfrak{G})$ , entgegen (4) (siehe GASCHÜTZ [1], S. 162, Satz 5).

Es liegt die Frage nahe, ob man in Hilfssatz 1 das Glied  $K_k(\mathfrak{P})$  der absteigenden Zentralreihe durch ein Glied der aufsteigenden Zentralreihe — etwa das Zentrum selbst — ersetzen kann. Dies ist jedoch wegen der schlechten Vererbungseigenschaften des Zentrums nicht möglich, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei  $\mathfrak{Q}$  die Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit den Erzeugenden  $A, B$  und den definierenden Relationen

$$A^2 = B^2 = (A, B), \quad A^4 = E.$$

Seien  $\alpha, \beta$  die folgenden Automorphismen von  $\mathfrak{Q}$ :

$$A^\alpha = B, \quad B^\alpha = A \quad \text{und} \quad A^\beta = B, \quad B^\beta = AB.$$

Das Holomorph  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{Q}$  mit der von  $\alpha$  und  $\beta$  erzeugten Gruppe (welche zur symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_3$  isomorph ist) hat die 2-Länge 2. Die 2-Sylowgruppe  $\langle \mathfrak{Q}, \alpha \rangle$  hat das Zentrum  $\langle A^2 \rangle$ , welches sogar in  $\mathfrak{H}$  normal ist, also mit der 3-Sylowgruppe von  $\mathfrak{H}$  sicher als Ganzes vertauschbar ist.

Zieht man dagegen *alle* Glieder der aufsteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}$  heran, so läßt sich folgender Satz beweisen:



**Hilfssatz 2.** Sei  $\mathfrak{G}$  eine  $p$ -auflösbare Gruppe mit der  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  und dem  $p$ -Komplement  $\mathfrak{Q}$ . Alle Glieder der aufsteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}$  seien als Ganzes mit  $\mathfrak{Q}$  vertauschbar. Dann hat  $\mathfrak{G}$  die  $p$ -Länge 1.

**Beweis.** Wir können offenbar annehmen, daß  $\mathfrak{G}$  keinen Normalteiler von zu  $p$  teilerfremder Ordnung hat.

Sei  $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{Q}}$  mit  $\bar{\mathfrak{Q}} < \mathfrak{Q}$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  von zu  $p$  teilerfremdem Index. Dann ist  $\mathfrak{T} \cap Z_i(\mathfrak{P})\bar{\mathfrak{Q}} = Z_i(\mathfrak{P})\bar{\mathfrak{Q}}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{T}$ . Also erfüllt auch  $\mathfrak{T}$  unsere Voraussetzungen. Ist  $\mathfrak{T} < \mathfrak{G}$ , so können wir gemäß einer Induktionsannahme  $\mathfrak{T}$  von  $p$ -Länge 1 annehmen. Dann hat auch  $\mathfrak{G}$  selbst die  $p$ -Länge 1. Wir können also annehmen, daß  $\mathfrak{G}$  keinen Normalteiler von zu  $p$  teilerfremdem Index hat.

Sei  $\mathfrak{N}$  der maximale  $p$ -Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ . Da  $\mathfrak{G}$  keine Normalteiler von zu  $p$  teilerfremder Ordnung hat, gilt  $C(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{N}$ . Wir erhalten also  $Z_1(\mathfrak{P}) \leq C(\mathfrak{N}) \leq \mathfrak{N}$ . Daher ist  $\mathfrak{N} \cap Z_1(\mathfrak{P})\bar{\mathfrak{Q}} = Z_1(\mathfrak{P})\bar{\mathfrak{Q}}$ , also auch  $Z_1(\mathfrak{P})\bar{\mathfrak{Q}} < \mathfrak{G}$ . Aus  $\mathfrak{P} \leq C(Z_1(\mathfrak{P})) \leq \mathfrak{G}$  folgt, daß  $C(Z_1(\mathfrak{P}))$  in  $\mathfrak{G}$  einen zu  $p$  teilerfremden Index hat. Also ist

$$C(Z_1(\mathfrak{P})) = \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad Z_1(\mathfrak{P}) \leq Z(\mathfrak{G}).$$

Die Gruppe  $\mathfrak{G}/Z_1(\mathfrak{P})$  erfüllt wieder alle Voraussetzungen. Wir können daher annehmen, daß  $\mathfrak{G}/Z_1(\mathfrak{P})$  die  $p$ -Länge 1 hat. Sei  $\mathfrak{N}/Z_1(\mathfrak{P})$  der größte Normalteiler von  $\mathfrak{G}/Z_1(\mathfrak{P})$  von zu  $p$  teilerfremder Ordnung. Dann besitzt  $Z_1(\mathfrak{P})$  in  $\mathfrak{N}$  ein Komplement  $\mathfrak{S}$  und wegen  $Z_1(\mathfrak{P}) \leq Z(\mathfrak{G})$  folgt  $\mathfrak{N} = \mathfrak{S} \times Z_1(\mathfrak{P})$ . Also ist  $\mathfrak{S}$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ . Da aber  $\mathfrak{G}$  keinen Normalteiler von zu  $p$  teilerfremder Ordnung hat, erhalten wir  $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$ . Aus  $l_p(\mathfrak{G}/Z_1(\mathfrak{P})) = 1$  folgt aber dann  $l_p(\mathfrak{G}) = 1$ .

**Beweis von Satz 1.**

Die Teile a) und b) von Satz 1 folgen jetzt sofort; denn die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 bzw. Hilfssatz 2 sind nun für jedes  $p_i$  erfüllt.

Die Aussage unter c) ergibt sich so:  $\mathfrak{G}$  habe die  $p_i$ -Länge 1 für jedes  $p_i$ . Dies gilt dann auch für die Untergruppe  $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j$ . Sei  $\mathcal{P}(\mathfrak{P}_i)$  eine charakteristische Untergruppe von  $\mathfrak{P}_i$ , sei ferner  $\mathfrak{G} \trianglelefteq \mathfrak{H}_1 < \mathfrak{H}_2 \trianglelefteq \mathfrak{H}$  die aufsteigende  $p_i$ -Reihe von  $\mathfrak{H}$ , also  $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1\mathfrak{P}_i$ , außerdem  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_2$  von zu  $p_i$  teilerfremder Ordnung. Dann haben wir  $\mathfrak{H}_1\mathcal{P}(\mathfrak{P}_i) \trianglelefteq \mathfrak{H}$ , und daher ist  $\mathfrak{P}_j\mathfrak{H}_1\mathcal{P}(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_j\mathcal{P}(\mathfrak{P}_i)$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{H}$ . Diesen Schluß wiederholen wir nun für den Faktor  $\mathfrak{P}_j$  in  $\mathfrak{P}_j\mathcal{P}(\mathfrak{P}_i)$  und erhalten so die Vertauschbarkeit von  $\mathcal{P}(\mathfrak{P}_i)$  mit jeder charakteristischen Untergruppe von  $\mathfrak{P}_j$ .

Den Beweis der Sätze 2 bis 4 stützen wir auf drei weitere Hilfssätze:

**Hilfssatz 3.** Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist  $\mathfrak{G}$  überauflösbar.

**Beweis.** Es genügt bekanntlich der Nachweis, daß jede maximale Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  Primzahlindex hat (siehe M. HALL [4], S. 162). Sei  $\mathfrak{M}$  eine maximale Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ . Da  $\mathfrak{G}$  auflösbar ist, haben wir bekanntlich  $|\mathfrak{G}:\mathfrak{M}| = p_j^\beta$ . Sei  $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r$  ein Sylowsystem von  $\mathfrak{M}$ . Dann existiert ein Sylowsystem  $\mathfrak{P}_1^*, \dots, \mathfrak{P}_r^*$  von  $\mathfrak{G}$  mit  $\mathfrak{M}_i \leq \mathfrak{P}_i^*$  für alle  $i$  (P. HALL [2], S. 321). Da alle Sylowsysteme von  $\mathfrak{G}$  konjugiert sind (P. HALL [2], S. 320/21), gilt auch für die  $\mathfrak{P}_i^*$  unsere Voraussetzung. Wir können daher  $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i^*$  annehmen.



Sei  $\mathfrak{M}_j \leq \mathfrak{U} < \mathfrak{P}_j$  und  $|\mathfrak{P}_j : \mathfrak{U}| = p_j$ . Nach unserer Voraussetzung ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{j-1} \mathfrak{U} \mathfrak{P}_{j+1} \dots \mathfrak{P}_r$$

eine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$ , welche den Index  $p_j$  hat. Nun gilt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_r \leq \mathfrak{B} < \mathfrak{G}.$$

Wegen der Maximalität von  $\mathfrak{M}$  folgt dann  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$  und  $|\mathfrak{G} : \mathfrak{M}| = p_j$ , was zu zeigen war.

**Hilfssatz 4.** *Sei  $\mathfrak{P}$  eine  $p$ -Gruppe,  $\alpha \neq 1$  ein Automorphismus von  $\mathfrak{P}$  von zu  $p$  teilerfremder Ordnung, welcher jeden Normalteiler von  $\mathfrak{P}$  auf sich abbildet. Dann stimmen die aufsteigende Zentralreihe  $\{Z_i(\mathfrak{P})\}$  von  $\mathfrak{P}$  und die absteigende Zentralreihe  $\{K_i(\mathfrak{P})\}$  von  $\mathfrak{P}$  (mit  $K_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ ,  $K_{i+1}(\mathfrak{P}) = (K_i(\mathfrak{P}), \mathfrak{P})$ ) abgesehen von der Bezifferung überein.*

**Beweis.** Sei  $c$  die Klasse von  $\mathfrak{P}$ . Da sich unsere Voraussetzung auf Faktorgruppen von  $\mathfrak{P}$  nach  $\alpha$ -invarianten Normalteilern überträgt, genügt der Nachweis von  $Z_1(\mathfrak{P}) = K_c(\mathfrak{P})$ .

Nach unserer Voraussetzung wird jede Untergruppe  $\mathfrak{U}$  von  $\mathfrak{P}$ , die zwischen zwei benachbarten Gliedern der aufsteigenden oder absteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}$  liegt, von  $\alpha$  auf sich abgebildet; denn jede solche Gruppe  $\mathfrak{U}$  ist offenbar ein Normalteiler von  $\mathfrak{P}$ . Also haben wir

$$P^\alpha \equiv P^{n(i)} \pmod{K_{i+1}(\mathfrak{P})} \text{ für alle } P \in K_i(\mathfrak{P})$$

und

$$P^\alpha \equiv P^{m(i)} \pmod{Z_{i-1}(\mathfrak{P})} \text{ für alle } P \in Z_i(\mathfrak{P}).$$

Seien  $X_1, \dots, X_k$  Erzeugende von  $\mathfrak{P} \pmod{K_2(\mathfrak{P})}$ . Dann erzeugen die  $i$ -fachen linksnormierten Kommutatoren der  $X_j$  bekanntlich  $K_i(\mathfrak{P}) \pmod{K_{i+1}(\mathfrak{P})}$ . Eine einfache Rechnung liefert daher  $n(i+1) \equiv n(i)n(1) \pmod{p}$ . Da  $\alpha$  nicht der identische Automorphismus auf  $\mathfrak{P}$  ist, gilt  $n(1) \not\equiv 1 \pmod{p}$ ; denn sonst würde  $\alpha$  auf  $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$  den identischen Automorphismus bewirken, dann aber nach einem bekannten Satz auch auf  $\mathfrak{P}$  (siehe M. HALL [4], S. 177/78). Also ist  $n(i+1) \not\equiv n(i) \pmod{p}$ . Nun haben wir

$$P^\alpha = P^{m(1)} \text{ für } P \in Z_1(\mathfrak{P})$$

und

$$P^\alpha = P^{n(c)} \text{ für } P \in K_c(\mathfrak{P}).$$

Wegen  $K_c(\mathfrak{P}) \leq Z_1(\mathfrak{P})$  folgt  $m(1) \equiv n(c) \pmod{p}$ . Sei  $\mathfrak{U} = K_{c-1}(\mathfrak{P})Z_1(\mathfrak{P})$ . Dann liegt  $\mathfrak{U}/K_c(\mathfrak{P})$  im Zentrum von  $\mathfrak{P}/K_c(\mathfrak{P})$ . Wir haben daher

$$P^\alpha \equiv P^k \pmod{K_c(\mathfrak{P})} \text{ für alle } P \in \mathfrak{U}.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{G} < K_{c-1}(\mathfrak{P})/K_c(\mathfrak{P}) \leq \mathfrak{U}/K_c(\mathfrak{P}).$$

Daher folgt  $k \equiv n(c-1) \pmod{p}$ .

Auf  $Z_1(\mathfrak{P})K_c(\mathfrak{P})/K_c(\mathfrak{P})$  gilt jedoch  $P^\alpha \equiv P^{m(1)}$ , und es ist

$$m(1) \equiv n(c) \not\equiv n(c-1) \pmod{p}.$$

Also folgt notwendig  $Z_1(\mathfrak{P}) = K_c(\mathfrak{P})$ .

**Hilfssatz 5.** Sei  $\mathfrak{P}$  eine  $p$ -Gruppe und sei  $\alpha \neq 1$  ein Automorphismus von  $\mathfrak{P}$  von zu  $p$  teilerfremder Ordnung, welcher jede Untergruppe von  $\mathfrak{P}$  in sich überführt. Dann ist  $\mathfrak{P}$  abelsch und  $\alpha$  hat die Gestalt  $P^\alpha = P^k$ , wobei  $k$  eine von  $P$  unabhängige ganze rationale Zahl ist.

Beweis. Angenommen  $\mathfrak{P}$  sei nicht abelsch. Dann gibt es einen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{P}$  mit  $|\mathfrak{P}/\mathfrak{N}| = p$ . Nach unserer Voraussetzung ist  $\mathfrak{N}^\alpha = \mathfrak{N}$ . Wir können also  $\alpha$  auf  $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$  betrachten, können daher  $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$  annehmen. Dann hat  $\mathfrak{P}$  die Klasse 2.

Seien  $X$  und  $Y$  Elemente von  $\mathfrak{P}$  mit  $C = \langle X, Y \rangle \neq E$ . Es ist  $X^\alpha = X^{n(X)}$  und  $Y^\alpha = Y^{n(Y)}$ . Wir können offenbar  $\mathfrak{P} = \langle X, Y \rangle$  annehmen. Da  $\mathfrak{P}$  die Klasse 2 hat, folgt

$$C^\alpha = \langle X^\alpha, Y^\alpha \rangle = \langle X^{n(X)}, Y^{n(Y)} \rangle = \langle X, Y \rangle^{n(X)n(Y)} = C^{n(X)n(Y)},$$

also  $n(C) = n(X)n(Y)$ . Ferner gilt

$$(XC)^\alpha = X^\alpha C^\alpha = X^{n(X)} C^{n(X)n(Y)} = (XC)^{n(XC)} = X^{n(XC)} C^{n(XC)}.$$

Daraus folgt

$$C^{n(X)n(Y)-n(XC)} = X^{n(XC)-n(X)}.$$

Ist  $\langle C \rangle \cap \langle X \rangle = \mathfrak{E}$ , so haben wir  $n(X)n(Y) \equiv n(XC) \equiv n(X) \pmod{p}$ , daher  $n(Y) \equiv 1 \pmod{p}$ . Ist aber  $\langle C \rangle \leq \langle X \rangle$ , so gilt  $n(C) = n(X)n(Y) \equiv n(X) \pmod{p}$  und wieder  $n(Y) \equiv 1 \pmod{p}$ . In der gleichen Weise erhalten wir auch  $n(X) \equiv 1 \pmod{p}$ . Also bewirkt  $\alpha$  auf  $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$  den identischen Automorphismus. Nach dem schon verwendeten Satz folgt dann  $\alpha = 1$ , entgegen der Voraussetzung. Also ist  $\mathfrak{P}$  doch abelsch.  $\alpha$  läßt auch jede Untergruppe von  $\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})$  fest. Daher gibt es ein  $n$  mit

$$P^\alpha \equiv P^n \pmod{\Phi(\mathfrak{P})} \text{ für alle } P \in \mathfrak{P}.$$

Dabei ist  $n$  nur mod  $p$  festgelegt. Wir bestimmen nun eine ganze rationale Zahl  $m$  mit  $nm \equiv 1 \pmod{p}$  und  $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^\mu}$ , wobei  $p^\mu$  der Exponent von  $\mathfrak{P}$  sei. Sei  $\varphi$  der durch  $P^\varphi = P^m$  bestimmte Automorphismus von  $\mathfrak{P}$ . Die Ordnung von  $\varphi$  ist ein Teiler von  $p-1$ , ist daher teilerfremd zu  $p$ . Da  $\alpha$  und  $\varphi$  vertauschbar sind, ist dann auch die Ordnung von  $\alpha\varphi$  teilerfremd zu  $p$ . Wir haben jetzt

$$P^{\alpha\varphi} \equiv P^{nm} \equiv P \pmod{\Phi(\mathfrak{P})} \text{ für alle } P \in \mathfrak{P}.$$

Nach dem schon mehrfach benutzten Satz ist dann  $\alpha\varphi = 1$ , daher  $P^\alpha = P^{\varphi^{-1}} = P^{m^{-1}}$ . Die gewünschte Zahl  $k$  ist nun aus  $mk \equiv 1 \pmod{p^\mu}$  zu bestimmen.

Beweis von Satz 2.

Wir beweisen den Satz durch eine Induktion nach  $|\mathfrak{G}|$ .

Nach Hilfssatz 3 ist  $\mathfrak{G}$  überauflösbar. Ist  $p_1$  der größte Primteiler von  $|\mathfrak{G}|$ , so gilt daher bekanntlich  $\mathfrak{P}_1 \trianglelefteq \mathfrak{G}$ . Die Gruppe  $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_r$  ist dann ein  $p_1$ -Komplement von  $\mathfrak{G}$ . Da  $\mathfrak{Q}_1$  wieder alle Voraussetzungen erfüllt, können wir annehmen, daß für  $\mathfrak{Q}_1$  die Aussagen (1), (2) und (3) schon bewiesen sind. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1:  $\mathfrak{Q}_1$  zentralisiere  $\mathfrak{P}_1$ . Dann ist  $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1$ , daher  $K_\infty(\mathfrak{G}) = K_\infty(\mathfrak{Q}_1)$ . Also ist  $K_\infty(\mathfrak{Q}_1)$  eine nilpotente Untergruppe von  $\mathfrak{Q}_1$ , welche (1)–(3) erfüllt. Daraus folgt offenbar, daß (1)–(3) auch für  $K_\infty(\mathfrak{G})$  gelten.



Fall 2:  $\Omega_1$  zentralisiere  $\mathfrak{P}_1$  nicht. Wir betrachten die Wirkung eines Elementes  $Q \in \Omega_1$  auf der Faktorgruppe  $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ . Nach unserer Voraussetzung ist jede maximale Untergruppe  $\mathfrak{U}$  von  $\mathfrak{P}_1$  mit  $\Omega_1$  vertauschbar, wird daher von  $\Omega_1$  normalisiert. Fassen wir die elementar abelsche Gruppe  $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$  als Vektorraum über dem Körper  $GF(p_1)$  auf (indem wir sie für den Augenblick additiv schreiben), so läßt der von  $Q$  bewirkte Automorphismus jeden Teilraum fest, ist daher eine Multiplikation mit einem skalaren Faktor. Für  $\mathfrak{P}_1$  heißt das: Für alle  $P \in \mathfrak{P}_1$  gilt

$$P^Q \equiv P^{n(Q)} \bmod \Phi(\mathfrak{P}_1).$$

Sei nun  $Q$  nicht im Zentralisator von  $\mathfrak{P}_1$ . Dann ist  $n(Q) \not\equiv 1 \bmod p_1$ . Sei  $K_\infty(\mathfrak{G}) = K_k(\mathfrak{G})$ . Jetzt haben wir für  $P \notin \Phi(\mathfrak{P}_1)$

$$(\dots(P, \underbrace{Q, Q, \dots}_k), Q) = P^{(n(Q)-1)^k} \equiv E \bmod \Phi(\mathfrak{P}_1), \quad \text{da } (n(Q) - 1)^k \not\equiv 0 \bmod p_1.$$

Daher enthält  $K_\infty(\mathfrak{G})$  ein volles System von Restklassenvertretern für  $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ . Nach dem Burnsideschen Basissatz (M. HALL [4], S. 176) folgt  $\mathfrak{P}_1 \leq K_\infty(\mathfrak{G})$  und weiter  $K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}_1 K_\infty(\Omega_1)$ .

Die von  $\Omega_1$  auf  $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$  bewirkten Automorphismen bestehen aus Abbildungen der Gestalt  $(P\Phi(\mathfrak{P}_1))^Q = P^{n(Q)}\Phi(\mathfrak{P}_1)$ , bilden daher eine abelsche Gruppe. Mithin bewirkt die Kommutatorgruppe  $\Omega_1$  von  $\Omega_1$  auf  $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$  den identischen Automorphismus. Nach dem schon mehrfach benutzten Satz gilt dann das Gleiche auch auf  $\mathfrak{P}_1$ . Also folgt  $K_\infty(\Omega_1) \leq \Omega'_1 \leq C(\mathfrak{P}_1)$  und dann  $K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}_1 \times K_\infty(\Omega_1)$ . Mit Hilfe der Induktionsannahme erhalten wir nun sofort die Aussagen (1), (2) und (3) für  $\mathfrak{G}$ .

Die Umkehrung ergibt sich so:  $\mathfrak{G}$  habe die Eigenschaften (1), (2) und (3). Da Ordnung und Index von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  nach (2) teilerfremd sind, gibt es ein Komplement  $\mathfrak{H}$  für  $K_\infty(\mathfrak{G})$  in  $\mathfrak{G}$ . Dieses ist notwendig nilpotent. Wir erhalten nun ein Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$ , wenn wir die Sylowgruppen von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  und die Sylowgruppen von  $\mathfrak{H}$  zusammennehmen. Je zwei verschiedene Sylowgruppen von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  oder  $\mathfrak{H}$  sind elementweise vertauschbar. Und jede maximale Untergruppe einer Sylowgruppe von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  wird infolge von (3) von ganz  $\mathfrak{G}$  normalisiert, ist also mit jeder Sylowgruppe des Sylowsystems als Ganzes vertauschbar. Da alle Sylowsysteme von  $\mathfrak{G}$  konjugiert sind, gilt die soeben bewiesene Aussage auch für jedes Sylowsystem von  $\mathfrak{G}$ .

### Beweis von Satz 3.

Da unsere Voraussetzungen jetzt schärfer sind als die von Satz 2, gelten sicher die Aussagen (1)–(3). Ist  $\Omega_1 \leq C(\mathfrak{P}_1)$ , so haben wir  $K_\infty(\mathfrak{G}) = K_\infty(\Omega_1)$  und sind fertig, da wir annehmen können, daß (4) für  $\Omega_1$  schon bewiesen ist. Ist jedoch  $\Omega_1 \not\leq C(\mathfrak{P}_1)$ , so sei  $Q \in \Omega_1$ , aber  $Q \notin C(\mathfrak{P}_1)$ . Da  $\Omega_1$  mit jedem Normalteiler  $\mathfrak{N}$  von  $\mathfrak{P}_1$  vertauschbar ist, haben wir  $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{N}\Omega_1 = \mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}\Omega_1$ . Das ergibt  $\mathfrak{N}^Q = \mathfrak{N}$ . Setzen wir nun  $P^\alpha = P^Q$  für  $P \in \mathfrak{P}_1$ , so hat  $\alpha$  die Eigenschaften von Hilfssatz 4. Also stimmen aufsteigende und absteigende Zentralreihe von  $\mathfrak{P}_1$  überein. Wegen

$$K_\infty(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}_1 \times K_\infty(\Omega_1)$$

erfüllen die von  $\mathfrak{P}_1$  verschiedenen Sylowgruppen von  $K_\infty(\mathfrak{G})$  gemäß unserer Annahme, daß der Satz für  $\Omega_1$  schon bewiesen ist, sicher auch (4).



## Beweis von Satz 4.

Mit Hilfssatz 5 an Stelle von Hilfssatz 4 erhalten wir die Behauptungen von Satz 4. Die Umkehrung ergibt sich wie bei Satz 2.

Es scheint nicht ganz einfach zu sein, unter den Voraussetzungen von Satz 2 eine über (3) hinausgehende Aussage über  $K_\infty(\mathfrak{G})$  zu machen. Insbesondere gibt es keine Schranke für die Klasse von  $K_\infty(\mathfrak{G})$ , wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei  $\mathfrak{P}$  die Gruppe der Dreiecksmatrizen  $(a_{ij})$  vom Grad  $n$  mit  $a_{ii} = 1$ ,  $a_{ij} = 0$  für  $i < j$  und  $a_{ij} \in GF(p^f)$ . Die Klasse von  $\mathfrak{P}$  ist  $n - 1$  und die Glieder  $K_s(\mathfrak{P})$  der absteigenden Zentralreihe von  $\mathfrak{P}$  werden gegeben durch die Matrizen  $(a_{ij})$  mit  $a_{ij} = 0$  für  $i - j \leq s - 1$  (siehe etwa WEIR [5]). Sei  $b$  ein von 0 verschiedenes Element aus  $GF(p^f)$ . Dann ist die Abbildung  $\varphi$  von  $(a_{ij})$  auf die Matrix  $(b^{i-j}a_{ij})$  ein Automorphismus von  $\mathfrak{P}$ , wie eine triviale Rechnung zeigt. Auf den elementar abelschen Faktorgruppen  $K_i(\mathfrak{P})/K_{i+1}(\mathfrak{P})$  wird dieser Automorphismus durch die Potenzierung mit  $b^i$  wiedergegeben. Die zerfallende Erweiterung von  $\mathfrak{P}$  mit  $\varphi$  hat offenbar die Eigenschaften (1)–(3). Uns ist nicht bekannt, ob der Automorphismus  $\varphi$  sogar alle Normalteiler von  $\mathfrak{P}$  auf sich abbildet.

## Beweis von Satz 5.

Sei  $\mathfrak{U}$  irgendeine maximale Untergruppe von  $\mathfrak{P}$ . Dann hat  $\mathfrak{H} = \mathfrak{U}\Omega$  in  $\mathfrak{G}$  den Index  $p$ . Die auf den Nebenklassen von  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{P}$  bewirkte Permutationsgruppe vom Grad  $p$  liefert eine Darstellung von  $\mathfrak{G}$ . Deren Kern sei  $\mathfrak{K}$ . Da nun  $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$  zu einer transitiven Gruppe vom Grad  $p$  isomorph ist, gilt  $p^2 \nmid |\mathfrak{G}/\mathfrak{K}|$ . Also ist  $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{U}$ . Nun bilden wir den Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  aller dieser Normalteiler  $\mathfrak{K}$ . Dann ist  $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{P} = \bigcap \mathfrak{U} = \Phi(\mathfrak{P})$ . Ferner ist  $\mathfrak{D} \cap \Omega = \mathfrak{Q}$  ein  $p$ -Komplement von  $\mathfrak{D}$ , also gilt  $\mathfrak{D} = \Phi(\mathfrak{P})\mathfrak{Q}$ .

Sei zunächst  $\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{G}$ . Sei  $\mathfrak{R}$  eine in  $\mathfrak{Q}$  liegende, von  $\mathfrak{G}$  verschiedene Sylowgruppe von  $\mathfrak{D}$ . Dann gilt  $\mathfrak{D}\mathfrak{P} = \mathfrak{D}(N(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{D}\mathfrak{P})$  und sogar  $\mathfrak{D}\mathfrak{P} = \mathfrak{D}(N(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{P})$ , sofern wir  $\mathfrak{R}$  so wählen – nötigenfalls durch Übergang zu einer Konjugierten –, daß  $N(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{P}$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $N(\mathfrak{R})$  ist. Jetzt folgt

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{D} \cap \mathfrak{P})(N(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{P}) = N(\mathfrak{R}) \cap \mathfrak{P},$$

da  $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{P} = \Phi(\mathfrak{P})$  gilt. Das ergibt  $\mathfrak{P} \leq N(\mathfrak{R})$ . Nun ist

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{R}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{R}^{\mathfrak{P}\Omega} = \mathfrak{R}^{\Omega} \leq \Omega \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} < \mathfrak{I} \triangleleft \mathfrak{G}.$$

Also können wir  $\mathfrak{G}/\mathfrak{I}$  betrachten und einen Induktionsschluß anwenden.

Sei nun  $\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}$ . Jetzt haben wir  $\mathfrak{D} = \Phi(\mathfrak{P}) \triangleleft \mathfrak{G}$ . Wir gehen zur Faktorgruppe  $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$  über. Jede maximale Untergruppe  $\overline{\mathfrak{U}}$  von  $\mathfrak{P}$  läßt sich nach der obenstehenden Überlegung schreiben als  $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{P} \cap \overline{\mathfrak{R}}$  mit  $\overline{\mathfrak{R}} \triangleleft \overline{\mathfrak{G}}$ . Da alle Untergruppen der elementar abelschen Gruppe  $\mathfrak{P}$  sich als Durchschnitte der maximalen Untergruppen  $\overline{\mathfrak{U}}$  darstellen lassen, ist jede Untergruppe von  $\mathfrak{P}$  der Durchschnitt eines Normalteilers von  $\overline{\mathfrak{G}}$  mit  $\mathfrak{P}$ . Nach WIELANDT [6] Satz (3.8) folgt daraus die  $p$ -Auflösbarkeit von  $\overline{\mathfrak{G}}$ , sofern wir  $|\overline{\mathfrak{P}}| > p$  annehmen. Ist aber  $|\overline{\mathfrak{P}}| = |\mathfrak{P}/\Phi(\mathfrak{P})| = p$ , so ist  $\mathfrak{P}$  zyklisch und wegen  $\mathfrak{G} < \Phi(\mathfrak{P}) \triangleleft \mathfrak{G}$  folgt aus WIELANDT [6], Satz (4.3) wieder die  $p$ -Auflösbarkeit von  $\mathfrak{G}$ .



## Literaturverzeichnis

- [1] W. GASCHÜTZ, Über die  $\Phi$ -Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. **59**, 160—170 (1953).
- [2] P. HALL, On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc., II. Ser. **43**, 316—323 (1937).
- [3] P. HALL and G. HIGMAN, On the  $p$ -length of  $p$ -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. London Math. Soc., III. Ser. **6**, 1—40 (1956).
- [4] M. HALL, The theory of groups. New York 1957.
- [5] A. WEIR, Sylow  $p$ -subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic  $p$ . Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 454—464 (1955).
- [6] H. WIELANDT, Sylowgruppen und Kompositionsstruktur. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22**, 215—228 (1958).
- [7] H. ZASSENHAUS, Lehrbuch der Gruppentheorie. Berlin 1937.

Eingegangen am 15. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Bertram Huppert  
Mathematisches Institut der Universität  
Tübingen



## Nicht-einfache Partitionen endlicher Gruppen

Von

OTTO H. KEGEL

Unter einer *Partition*  $\pi$  einer endlichen Gruppe  $G \neq 1$  sei eine Menge von Untergruppen  $A_i (\neq 1)$  von  $G$  verstanden, derart daß jedes Element  $\neq 1$  von  $G$  in genau einer der Untergruppen  $A_i$  enthalten ist. Die Untergruppen  $A_i$  heißen die *Komponenten* von  $\pi$ . Die Partition  $\pi$  von  $G$  heißt *nicht-trivial*, wenn die  $A_i$  echte Untergruppen von  $G$  sind. Eine ausführliche Diskussion endlicher Gruppen mit nicht-trivialen Partitionen findet man bei BAER ([1], [2], [3]).

Allgemein scheint es schwierig, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer nicht-trivialen Partition einer endlichen Gruppe  $G$  anzugeben. Unter den nicht-primären Gruppen mit einem auflösbaren Normalteiler  $\neq 1$  lassen nur diejenigen eine nicht-triviale Partition zu, die eine der in Satz 3 angegebenen Strukturen besitzen. Ist  $G$  aber eine Primärgruppe, so gilt ein einfaches Kriterium:

**Lemma.** *Die endliche  $p$ -Gruppe  $G$  besitzt genau dann eine nicht-triviale Partition, wenn die Ordnung  $o(G) \nmid p$  ist und  $G$  nicht von seinen Elementen mit von  $p$  verschiedener Ordnung erzeugt wird.*

Beweis. Sei  $H_p(G)$  die (charakteristische) Untergruppe von  $G$ , die von allen Elementen von  $G$  mit von  $p$  verschiedener Ordnung erzeugt wird. Ist  $H_p(G) \neq G$ , so hat jedes Element von  $G$ , das nicht in  $H_p(G)$  enthalten ist, die Ordnung  $p$ . Die Menge der von diesen Elementen erzeugten zyklischen Gruppen bildet zusammen mit  $H_p(G)$  — falls dieses  $\neq 1$  ist — eine Partition  $\pi$  von  $G$ . Wegen  $o(G) \nmid p$  ist  $\pi$  nicht-trivial. — Besitzt aber die endliche  $p$ -Gruppe  $G$  eine nicht-triviale Partition  $\pi$ , so ist  $G$  sicher nicht zyklisch von Primzahlordnung, d. h.  $o(G) \nmid p$ . Ist nun  $g$  ein Element der Ordnung  $p$  aus dem Zentrum von  $G$ , dann ist  $g$  mit jedem Element  $h$  von  $G$  mit von  $p$  verschiedener Ordnung in einer Komponente von  $\pi$  enthalten (vgl. [1], Lemma 2.1); also liegt  $g$  mit  $H_p(G)$  in derselben Komponente  $K$  von  $\pi$ . Da die Partition  $\pi$  von  $G$  nicht-trivial war, so ist  $H_p(G) \subseteq K \subset G$ . Damit ist das Lemma bewiesen.

Eine Partition  $\pi$  der Gruppe  $G$  heißt *normal*, wenn mit jeder Komponente  $A_i$  von  $\pi$  auch jede zu  $A_i$  konjugierte Untergruppe  $A_i^g$  eine Komponente von  $\pi$  ist. — Ist  $\pi$  eine Partition der endlichen Gruppe  $G$ , so heißt die Untergruppe  $U \neq 1$  von  $G$  dann  *$\pi$ -zulässig*, wenn jede Komponente von  $\pi$  entweder in  $U$  enthalten ist, oder nur das Einselement mit  $U$  gemein hat. — Die normale Partition  $\pi$  von  $G$  heißt *nicht-einfach*, wenn es einen  $\pi$ -zulässigen Normalteiler  $N \neq G$  von  $G$  gibt.

Jeder nicht-trivialen Partition  $\pi$  der Gruppe  $G$  kann man eine nicht-triviale, normale Partition  $\tau$  zuordnen (vgl. [1], Beweis von Satz 4.7), derart daß die Kompo-



nenten von  $\pi$  echte,  $\tau$ -zulässige Untergruppen von  $G$  sind. — Die nicht-triviale, normale Partition  $\pi$  der endlichen Gruppe  $G$  heißt *Frobeniuspartition*, falls eine Komponente von  $\pi$  in  $G$  gleich ihrem Normalisator ist. — Ist  $U$  eine Untergruppe  $\neq 1$  der endlichen Gruppe  $G$ , und ist  $\pi$  eine Partition von  $G$ , so bildet die Menge der Untergruppen  $A_i \cap U \neq 1$  eine Partition von  $U$ , die von  $\pi$  in  $U$  induzierte Partition  $\pi \cap U$ .

Unter den Gruppen mit nicht-trivialen Partitionen werden die Primärgruppen gekennzeichnet durch den

**Satz 1.** *Ist  $G$  eine Gruppe mit nicht-trivialer Partition  $\pi$ , so sind die folgenden Eigenschaften von  $G$  und  $\pi$  gleichwertig:*

1.  *$G$  ist eine Primärgruppe.*
2. *Jede Komponente von  $\pi$  ist Subnormalteiler von  $G$ .*
3. *Ist für die Untergruppe  $U$  von  $G$  die von  $\pi$  in  $U$  induzierte Partition  $\pi \cap U$  nicht-trivial, so besitzt  $\pi \cap U$  keine normalisatorgleiche Komponente.*  
*Ist die nicht-triviale Partition  $\pi$  von  $G$  überdies normal, so ist 1. auch äquivalent zu*
4. *Jede Komponente von  $\pi$  enthält einen Subnormalteiler  $\neq 1$  von  $G$ .*

**Beweis.** Da in nilpotenten Gruppen jede Untergruppe Subnormalteiler ist, so ist 2. eine einfache Folge aus 1. Aus 2. folgt die Existenz einer normalen, nicht-trivialen Partition  $\tau$  von  $G$ , die 4. erfüllt: denn der Durchschnitt endlich vieler Subnormalteiler ist subnormal und die Menge aller nicht-trivialen Durchschnitte von Konjugierten der Komponenten von  $\pi$  bildet eine normale Partition  $\tau$  von  $G$  (vgl. [1], Beweis von Satz 4.7). Die Komponenten dieser Partition  $\tau$  sind Subnormalteiler von  $G$  und erfüllen so die Bedingung 4.

Besitzt nun die normale, nicht-triviale Partition  $\pi$  von  $G$  die Eigenschaft 4., so ist die Gruppe  $G$  sicher nicht einfach. Nach [1], Folgerung 3.6 ist das Produkt aller minimalen Normalteiler von  $G$ , der Sockel  $SG$ , entweder abelsch oder nicht-abelsch einfach.

Nehmen wir zunächst an,  $SG$  sei nicht-abelsch einfach. Da nach 4. jede Komponente der nicht-trivialen Partition  $\pi$  einen Subnormalteiler  $\neq 1$  enthält, so gibt es mindestens eine Komponente  $K$  von  $\pi$ , die einen minimalen Subnormalteiler  $N$  von  $G$  enthält, aber nicht  $SG$ . Nach WIELANDT [5] zentralisieren dann  $N$  und  $SG$  einander. Aber nach [1], Lemma 2.1 liegen dann  $N$  und  $SG$  in derselben Komponente von  $\pi$ , was der Auswahl von  $K$  widerspricht. Also kann  $SG$  nicht nicht-abelsch einfach sein.

Ist aber  $SG$  abelsch, so kann die normale Partition  $\pi$  nach BAER [2], Satz A nur dann einfach sein, wenn  $G$  isomorph ist zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 und  $\pi$  aus den nicht in  $SG$  enthaltenen zyklischen Untergruppen von  $G$  besteht. Aber dann erfüllt  $\pi$  die Bedingung 4. nicht, wie man etwa an den Komponenten der Ordnung 3 sieht. Daher ist also die normale Partition  $\pi$  von  $G$  nicht-einfach.

Besitzt nun die Gruppe  $G$  eine nicht-einfache, normale Partition  $\pi$ , die keine Frobeniuspartition ist, und ist  $G$  keine Primärgruppe, so ist  $G$  nach [1], Satz 5.1 eine Erweiterung der Komponente  $K$  von  $\pi$  mit einer Gruppe von Primzahlordnung  $p$ ; und zwar ist die Komponente  $K$  von  $\pi$  die Untergruppe von  $G$ , die von allen Elementen von  $G$  mit von  $p$  verschiedener Ordnung erzeugt wird. Sei nun  $P$  eine Komponente von  $\pi$ , die zu  $K$  komplementär ist, also die Ordnung  $p$  hat. Aus 4. folgt,

daß  $P$  ein Subnormalteiler von  $G$  ist. Ist aber eine  $p$ -Untergruppe von  $G$  Subnormalteiler, so liegt sie in jeder  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ , und der von  $P$  aufgespannte Normalteiler  $N$  von  $G$  ist eine  $p$ -Untergruppe von  $G$ . Da  $K$  nach KEGEL [4] nilpotent und  $G = KP = KN$  ist, so ist  $G$  als Produkt nilpotenter Normalteiler selbst nilpotent. Eine nicht-primäre nilpotente Gruppe läßt aber nur die triviale Partition zu (vgl. BAER [1], Bemerkung 2.4). Dieser Widerspruch zeigt, daß  $G$  also entweder primär ist, oder  $\pi$  ist eine Frobeniuspartition.

Wäre nun  $\pi$  eine Frobeniuspartition und  $K$  eine normalisatorgleiche Komponente von  $\pi$ , dann ist  $G = K \cdot FG$  und für jedes  $g \notin K$  gilt  $K \cap K^g = 1$ . Enthielte  $K$  nun einen Subnormalteiler  $\neq 1$  von  $G$ , so würde dieser — und wegen der Normalität von  $\pi$  auch  $K$  — von  $SG$  normalisiert (vgl. WIELANDT [5]). — Da  $SG \subseteq FG$  und  $K \cap FG = 1$ , so ist dies ein Widerspruch zu  $K \cap K^g = 1$  für jedes  $g \notin K$ . — Dieser Widerspruch zeigt, daß für eine normale Partition  $\pi$  von  $G$  aus der Eigenschaft 4. die Eigenschaft 1. folgt.

Die Eigenschaft 3. ist eine unmittelbare Folge aus 1. Daß auch 1. aus 3. folgt, beweisen wir induktiv. Sei dies für alle Gruppen mit kleinerer Ordnung als  $G$  bewiesen.

Fall 1. Es gebe eine maximale Untergruppe  $M$  von  $G$ , die Komponente von  $\pi$  ist. Da  $M$  nach 3. in  $G$  nicht normalisatorgleich sein kann, so ist  $M$  normal in  $G$ , und es gibt eine Primzahl  $p$  mit  $[G:M] = p$ . Also ist auch für jede Komponente  $A$  von  $\pi$  mit  $A \neq M$  die Ordnung  $o(A) = p$  und  $\pi$  ist eine normale, nicht-einfache Partition von  $G$ . Wäre nun  $G$  keine  $p$ -Gruppe, so gäbe es nach [1], Satz 5.1 (c) ein nilpotentes normales  $p$ -Komplement  $L$  von  $G$ . Jedes Element  $\neq 1$  von  $A$  induzierte in  $L$  einen fixpunktfreien Automorphismus, also wäre  $AL$  eine Frobeniusgruppe und die Partition  $\pi \cap AL$  eine Frobeniuspartition von  $AL$ , was der Bedingung 3. widerspricht.

Fall 2. Für jede maximale Untergruppe  $M$  von  $G$  ist  $\pi \cap M$  eine nicht-triviale Partition von  $M$ . Dann ist nach Induktionsvoraussetzung jede maximale Untergruppe von  $G$  eine Primärgruppe. Nach dem Satz von SCHMIDT-IWASAWA ist  $G$  dann auflösbar. Angenommen,  $G$  sei keine Primärgruppe, und seien  $p$  und  $q$  verschiedene Primteiler von  $o(G)$ , so ist ein maximaler Normalteiler  $K$  von  $G$  o. B. d. A. eine  $p$ -Gruppe, und  $[G:K] = q$ . Da jede echte Untergruppe von  $G$  eine Primärgruppe ist, so ist die  $q$ -Sylowgruppe von  $G$  eine maximale Untergruppe von  $G$ . Deshalb ist  $K$  zugleich minimaler Normalteiler von  $G$ , und  $Q$  induziert eine Gruppe von fixpunktfreien Automorphismen in  $K$ , d. h.  $G$  ist eine Frobeniusgruppe und jede normale Partition von  $G$  ist eine Frobeniuspartition (vgl. [1], Satz 4.7 (c)). Sei nun  $N$  eine Komponente von  $\pi$ , die eine normalisatorgleiche Komponente einer normalen Verfeinerung  $\tau$  von  $\pi$  enthält, so ist  $N$  nach BAER ([1], Satz 4.7) auch normalisatorgleich. Dies widerspricht aber der Eigenschaft 3. Also muß  $G$  in jedem Falle eine Primärgruppe sein. — Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 1 zeigt, daß sich aus gewissen Einbettungseigenschaften für die Komponenten der nicht-trivialen Partition  $\pi$  von  $G$  bereits sehr scharfe Strukturaussagen für  $G$  gewinnen lassen. In diesen Zusammenhang gehört auch das

**Korollar.** *Ist für die nicht-triviale Partition  $\pi$  der endlichen Gruppe  $G$  jede Komponente von  $\pi$  ein Normalteiler von  $G$ , so ist  $G$  primär und elementar-abelsch.*



Beweis. Seien  $U$  und  $V$  Komponenten von  $\pi$ ; dann zentralisieren die Normalteiler  $U$  und  $V$  einander. Nach [1], Lemma 2.1 ist dies aber nur möglich, wenn alle Elemente von  $U$  und  $V$  gleiche Primzahlordnung haben. Also ist  $G$  eine Primärgruppe mit Primzahlexponenten. — Ist nun  $U$  eine Komponente von  $\pi$ , so wird  $U$  von allen Komponenten  $\neq U$  von  $\pi$  zentralisiert; und  $G$  wird von den Komponenten  $\neq U$  erzeugt, da  $\pi$  nicht-trivial ist. Also liegt  $U$  im Zentrum von  $G$ , woraus die Kommutativität von  $G$  folgt.

Ähnliche Bedingungen wie in Satz 1 geben eine Charakterisierung einer anderen Klasse endlicher Gruppen:

**Satz 2.** *Besitzt die endliche Gruppe  $G$  eine nicht-triviale Partition  $\pi$  und ist  $G$  keine Primärgruppe, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

1. *Die Partition  $\pi$  ist normal und nicht-einfach, die Fittingsche Untergruppe  $FG$  ist eine Komponente von  $\pi$  mit Primzahlindex in  $G$  und  $o(FG)$  und  $[G:FG]$  sind nicht teilerfremd.*
2. *Jede Komponente von  $\pi$  ist in einem echten Normalteiler von  $G$  enthalten.*
3. *Das Zentrum von  $G$  ist nicht-trivial:  $ZG \neq 1$ .*

*Ist überdies die nicht-triviale Partition  $\pi$  von  $G$  normal, so ist 1. äquivalent zu*

4. *Im Normalisator einer jeden Komponente von  $\pi$  ist ein Subnormalteiler  $\neq 1$  von  $G$  enthalten.*

Beweis. Aus 1. folgt 2.: die in 1. beschriebene Situation ist genau die in [1], Satz 5.1 (c) angegebene.  $[G:FG]$  ist daher eine Primzahl  $p$ , und jede Komponente von  $\pi$ , die von  $FG$  verschieden ist, hat die Ordnung  $p$ . Ist  $K$  das normale  $p$ -Komplement von  $G$ , so ist für jede Komponente  $L$  von  $\pi$  die Gruppe  $KL$  ein echter Subnormalteiler von  $G$ . Damit ist 2. nachgewiesen. Ist nun  $P$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  und  $ZP$  ihr Zentrum, so ist  $ZP \cap FG \neq 1$  das Zentrum von  $G$ ; und damit ist 3. eine Folge von 1. — Da jede Untergruppe des Zentrums normal in  $G$  ist, so folgt 4. aus 3.

Um zu zeigen, daß umgekehrt auch 1. aus 2. folgt, erinnere man sich, daß der Sockel  $SG$  entweder einfach oder abelsch ist, falls  $G$  eine nicht-triviale Partition zuläßt ([1], Folgerung 3.6). In [3] zeigt nun BAER, daß  $[G:SG] = 2$  ist, falls  $SG$  einfach und nicht-abelsch ist und  $G \neq SG$  eine nicht-triviale Partition besitzt, aber selber nicht einfach ist. Dann ist  $SG$  der einzige echte, nicht-triviale Normalteiler von  $G$ , so daß die Partition  $\pi$  von  $G$  sicher die Eigenschaft 2. nicht besitzt. Daher muß in einer Gruppe  $G$  mit einer nicht-trivialen, die Forderung 2. erfüllenden Partition der Sockel  $SG$  abelsch sein. Sei  $\tau$  irgendeine normale Verfeinerung von  $\pi$ , so erfüllt die nicht-triviale, normale Partition  $\tau$  auch die Forderung 2. Wäre nun die Partition  $\tau$  einfach, so wäre  $G$  isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 (BAER [2], Satz A) und  $\tau$  bestände aus den nicht in  $SG$  enthaltenen zyklischen Untergruppen von  $G$ . Dann gilt aber 2. offenbar nicht. Jede normale nicht-triviale Partition mit der Eigenschaft 2. ist also nicht-einfach. Da wir in der Voraussetzung ausgeschlossen hatten, daß  $G$  eine Primärgruppe ist, so brauchen wir nach [1], Satz 5.1 (c) nur zu zeigen, daß  $G$  keine Frobeniuspartition besitzen kann. Wäre dies doch der Fall, so wäre nach [1], Satz 4.7 (c) auch die normale Partition  $\tau$  von  $G$  eine Frobeniuspartition. Sei nun  $N$  eine normalisatorgleiche Komponente von  $\tau$ , dann ist  $N$  bekanntlich eine

Halluntergruppe von  $G$ . Da die normalisatorgleichen Komponenten von  $\tau$  eine Klasse konjugierter Halluntergruppen von  $G$  bilden, so ist auch jede Untergruppe  $u$  von  $G$  mit  $U \supseteq N$  ihr eigener Normalisator in  $G$ ; also kann keine Frobeniuspartition von  $G$  die Eigenschaft 2. besitzen. — Damit ist gezeigt, daß 1. aus 2. folgt.

Aus 4. folgt 1.: Die Gruppe  $G$  ist nach 4. nicht-einfach. Wäre der Sockel  $SG$  von  $G$  nicht-abelsch einfach und  $L$  eine Komponente der normalen Partition  $\pi$ , die ein Element  $g \notin SG$  enthält, so wäre  $SG$  nach 4. im Normalisator  $NL$  von  $L$  enthalten, da  $G$  nicht-einfach ist und  $SG$  nach BAER [3] der einzige nicht-triviale, echte Subnormalteiler von  $G$  ist. Daher ist  $L \cap SG$  ein Normalteiler von  $SG$ . Wäre  $L \cap SG = 1$ , so zentralisierten  $L$  und  $SG$  einander, und nach [1], Lemma 2.1 wäre  $SG$  in  $L$  enthalten, d. h.  $L = G$ , was nicht geht; denn die Partition  $\pi$  war als nicht-trivial vorausgesetzt. — Wäre aber  $L \cap SG \neq 1$ , so wäre wegen der Einfachheit von  $SG$  die Gruppe  $SG$  in der Komponente  $L$  von  $\pi$  enthalten, da  $L$  und  $SG$  einander normalisieren, und wieder ergäbe sich der Widerspruch  $L = G$  zur Nicht-Trivialität von  $\pi$ . Daher muß der Sockel  $SG$  von  $G$  abelsch sein.

Wäre nun die Partition  $\pi$  einfach, so wäre  $G$  isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 und  $\pi$  bestände aus all den zyklischen Untergruppen von  $G$ , die nicht in  $SG$  enthalten sind (BAER [2], Satz A). Die minimalen Subnormalteiler der symmetrischen Gruppe des Grades 4 haben die Ordnung 2 und sind in  $SG$  (mit  $o(SG) = 4$ ) enthalten. Die zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 induzieren in  $SG$  fixpunktfreie Automorphismen. Daher wird eine Komponente der Ordnung 3 von  $\pi$  von keinem Subnormalteiler von  $G$  normalisiert. Die einfache Partition der symmetrischen Gruppe des Grades 4 besitzt also die Eigenschaft 4. nicht.

Daher ist die Partition  $\pi$  von  $G$  nicht-einfach. Besäße nun  $G$  eine Frobeniuspartition, so wäre die normale, nicht-triviale Partition  $\pi$  nach [1], Satz 4.7, (c) auch eine Frobeniuspartition von  $G$ . Da alle minimalen Subnormalteiler einer Frobeniusgruppe  $G$  in ihrem Frobeniuskern, der Fittinguntergruppe  $FG$  enthalten sind, so bedeutet die Forderung 4., daß es ein Element  $g \neq 1$  aus  $FG$  und eine normalisatorgleiche Komponente  $L$  von  $\pi$  derart gibt, daß  $L^g = L$  gilt, was aber bekanntlich in einer Frobeniuspartition nicht möglich ist. — Also ist  $\pi$  keine Frobeniuspartition von  $G$ . Da  $G$  keine Primärgruppe ist, so ergibt sich aus [1], Satz 5.1, (c) das gewünschte Resultat. — Damit ist Satz 2 bewiesen.

*Bemerkung.* Ersetzt man die Eigenschaft 2. durch die schwächere: *Jedes Element von  $G$  ist in einem echten Normalteiler von  $G$  enthalten*, so ergibt sich eine echt größere Klasse von Gruppen mit nicht-trivialen Partitionen; denn es gibt Gruppen mit Frobeniuspartitionen, die eine solche Überdeckung durch echte Normalteiler zulassen.

*Bemerkung.* In der letzten Bedingung der Sätze 1 und 2 wird jeweils ausdrücklich die Normalität der Partition  $\pi$  gefordert. Wir haben nicht beweisen können, daß man hier auf die Normalität von  $\pi$  verzichten kann; doch ist mit der Richtigkeit dieser Aussage die Richtigkeit der folgenden (auch wohl an sich interessanten) Aussage gleichwertig:

*Sei  $\pi$  eine beliebige nicht-triviale Partition der Gruppe  $G$ , die eine Frobeniuspartition  $\tau$  besitzt, so gibt es eine normalisatorgleiche Komponente von  $\tau$ , die auch Komponente von  $\pi$  ist.*



Eine Zusammenfassung bekannter Strukturaussagen über Gruppen mit nicht-trivialen Partitionen gibt der

**Satz 3** (BAER [1], Satz 5.1; [2], Satz A). *Besitzt die Gruppe  $G$  eine nicht-triviale Partition und ist die Fittinggruppe  $FG \neq 1$ , und ist  $G$  weder eine Primärgruppe noch eine Frobeniusgruppe, so ist  $G$  entweder der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph oder  $G$  hat die in Satz 2 diskutierte Struktur.*

Aus dieser Übersicht ergibt sich das

**Korollar.** *Ist die Komponente  $L$  der nicht-trivialen normalen Partition  $\pi$  der endlichen Gruppe  $G$  mit  $FG \neq 1$  nicht-primär und nicht normalisatorgleich und ist*

$$([G : L], o(L)) \neq 1,$$

*so ist  $L = FG$ , und  $G$  hat die in Satz 2 diskutierte Struktur.*

**Beweis.** Da  $FG \neq 1$  ist, so fällt  $G$  unter die durch Satz 3 gegebene Übersicht. Da die Komponente  $L$  von  $\pi$  nicht primär ist, so ist auch  $G$  nicht primär. — Man verifiziert leicht, daß die symmetrische Gruppe des Grades 4 keine Partition mit einer Komponente der geforderten Art besitzt. — Ist nun  $G$  eine Frobeniusgruppe, so muß  $L$  in  $FG$  enthalten sein; denn  $L$  ist nicht normalisatorgleich. Dann ist aber die nilpotente Gruppe  $FG$  nicht primär, läßt also nach [1], Lemma 2.1 nur die triviale Partition zu; das heißt  $L = FG$ . Nun ist aber  $FG$  in einer Frobeniusgruppe eine Hall'sche Untergruppe, und dies widerspricht der Forderung  $([G : L], o(L)) \neq 1$ . So bleibt für  $G$  nach Satz 3 nur die in Satz 2 diskutierte Struktur übrig.

**Bemerkung.** Es ist eine offene Frage, inwieweit man in diesem Korollar auf die Forderung verzichten kann, daß  $FG \neq 1$  ist (vgl. [3]).

#### Literaturverzeichnis

- [1] R. BAER, Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
- [2] R. BAER, Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nichttrivialer Fittingscher Untergruppe. Arch. Math. **11**, 81—89 (1961).
- [3] R. BAER, Einfache Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **76**, (1961) (im Druck).
- [4] O. H. KEGEL, Die Nilpotenz der  $H_p$ -Gruppen. Math. Z. **75**, 373—376 (1961).
- [5] H. WIELANDT, Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. **69**, 463—465 (1958).

Eingegangen am 10. 4. 1961

Anschrift des Autors:

Otto H. Kegel  
Mathematisches Seminar  
der Universität  
Frankfurt/Main

## Über ein Levisches Nilpotenzkriterium

Von

HERMANN HEINEKEN

F. LEVI [1, S. 87] hat folgenden Satz bewiesen: Ist in einer Gruppe  $G$  jede von zwei Elementen erzeugte Untergruppe nilpotent der Klasse 2 (d. h. ist das dritte Glied der absteigenden Zentralreihe dieser Untergruppe gleich 1), so ist  $G$  nilpotent der Klasse 3 und das dritte Glied der absteigenden Zentralreihe ist vom Exponenten 3. Eine daran anknüpfende Frage ist, was man von einer Gruppe sagen kann, für die es eine Zahl  $n > 2$  gibt, so daß alle ihre von  $n$  Elementen erzeugten Untergruppen nilpotent der Klasse  $n$  sind.

Bezeichnungen:

$$x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy,$$

$Z(G)$  ist das Zentrum von  $G$ ; wir definieren induktiv  $Z_0(G) = 1$ ,

$$Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G)).$$

Ist  $G_1 = G$  und ist  $G_{n+1}$  das Erzeugnis aller Kommutatoren  $g \circ g_n$  mit  $g$  aus  $G$  und  $g_n$  aus  $G_n$ , so ist  $G_k$  das  $k$ -te Glied der absteigenden Zentralreihe von  $G$ .

**Lemma.** *Gelten in der Gruppe  $G$  die Bedingungen*

$$x \circ (y \circ (y \circ z)) = 1 \quad \text{und} \quad x \circ (x \circ (y \circ z)) = 1$$

*für alle Elementetripel  $x, y, z$  aus  $G$ , so ist  $G$  nilpotent der Klasse 3.*

**Beweis.** Wegen der ersten Bedingung ist  $y \circ (y \circ z) = 1 \bmod Z(G)$  für alle Paare  $y, z$  aus  $G$ . Das Erzeugnis  $\{a, b\}$  zweier Elemente  $a, b$  aus  $G/Z(G)$  ist daher nilpotent der Klasse 2, und nach dem oben erwähnten Satz von LEVI ist  $G/Z(G)$  also nilpotent der Klasse 3. Daher ist  $G$  nilpotent der Klasse 4 und die Kommutatoren der Länge 3 sind miteinander vertauschbar. Wegen des Satzes von LEVI gilt weiter

$$(u \circ (v \circ w))^3 \equiv 1 \bmod Z(G)$$

und daher

$$(1) \quad 1 = u \circ [v \circ (w \circ x)]^3 = (u \circ (v \circ (w \circ x)))^3$$

für alle  $u, v, w, x$  aus  $G$ . Wir erhalten nun neue Bedingungen aus den beiden oben angegebenen, indem wir für das doppelt auftretende Element ein Produkt einsetzen. Dadurch erhalten wir



$$\begin{aligned}
 1 &= x \circ ((uv) \circ ((uv) \circ z)) \\
 &= (x \circ (u \circ (u \circ z))) (x \circ (u \circ (v \circ z))) (x \circ (v \circ (u \circ z))) (x \circ (v \circ (v \circ z))) \\
 &= (x \circ (u \circ (v \circ z))) (x \circ (v \circ (u \circ z))),
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x \circ (u \circ (v \circ z)) = (x \circ (v \circ (u \circ z)))^{-1};$$

$$\begin{aligned}
 1 &= (uv) \circ ((uv) \circ (y \circ z)) \\
 &= (u \circ (u \circ (y \circ z))) (u \circ (v \circ (y \circ z))) (v \circ (u \circ (y \circ z))) (v \circ (v \circ (y \circ z))) \\
 &= (u \circ (v \circ (y \circ z))) (v \circ (u \circ (y \circ z))),
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad u \circ (v \circ (y \circ z)) = (v \circ (u \circ (y \circ z)))^{-1}.$$

Wir wenden nun folgende wohlbekannte Formel von P. HALL an (vgl. [2, S. 150]):

$$y^{-1}((x \circ y^{-1}) \circ z) y z^{-1}((y \circ z^{-1}) \circ x) z x^{-1}((z \circ x^{-1}) \circ y) x = 1.$$

Wir setzen nun für  $z$  den Kommutator  $u \circ v$  ein. Dadurch liegen die drei oben auftretenden Kommutatoren im Zentrum von  $G$ , denn sie haben die Länge 4 und  $G$  ist nilpotent der Klasse 4. Daher erhält man, wenn man  $y$  durch  $y^{-1}$  ersetzt,

$$\begin{aligned}
 ((x \circ y) \circ (u \circ v)) ((y^{-1} \circ (u \circ v)^{-1}) \circ x) (((u \circ v) \circ x^{-1}) \circ y^{-1}) &= 1, \\
 (x \circ y) \circ (u \circ v) &= (x \circ (y \circ (u \circ v))) (y \circ (x \circ (u \circ v)))^{-1} \\
 &= (x \circ (y \circ (u \circ v)))^2 \quad \text{nach (3)}.
 \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned}
 1 &= ((x \circ y) \circ (u \circ v)) ((u \circ v) \circ (x \circ y)) \\
 &= (x \circ (y \circ (u \circ v)))^2 (u \circ (v \circ (x \circ y)))^2 \\
 &= (x \circ u \circ (y \circ v))^{-2} (u \circ (v \circ (x \circ y)))^2 && \text{wegen (2)} \\
 &= (u \circ (x \circ (y \circ v)))^2 (u \circ (v \circ (x \circ y)))^2 && \text{wegen (3)} \\
 &= (u \circ (x \circ (v \circ y)))^{-2} (u \circ (v \circ (x \circ y)))^2 && \text{wegen } G_5 = 1 \\
 &= (u \circ (v \circ (x \circ y)))^4 && \text{wegen (2)}.
 \end{aligned}$$

Mit (1) ergibt sich damit

$$(u \circ (v \circ (x \circ y))) = 1 \quad \text{für alle } u, v, x, y \text{ aus } G,$$

daher ist  $G$  nilpotent der Klasse 3, und das war zu zeigen.

Wir können nun folgenden Satz beweisen:

**Satz.**  $G$  ist (dann und nur dann) nilpotent der Klasse  $n$  (mit  $n > 2$ ), wenn alle von  $n$  Elementen erzeugten Untergruppen nilpotent der Klasse  $n$  sind.

**Beweis.** Ist  $G$  nilpotent der Klasse  $n$ , so sind es auch alle Untergruppen von  $G$ . Es ist also nur das Hinreichen unserer Bedingung zu zeigen.

Nach der Bedingung sind alle Kommutatoren der Länge  $n + 1$  gleich 1, die zwei mit demselben Element besetzte Stellen aufweisen.

Seien nun  $x, y, z$  aus  $G$  gegeben und  $a_1, \dots, a_{n-3}$  beliebige Elemente aus  $G$ . Dann liegt  $x \circ (y \circ (y \circ z))$  in  $Z_{n-3}(G)$ , denn

$$a_1 \circ (\dots \circ (a_{n-3} \circ (x \circ (y \circ (y \circ z)))) \dots) = 1.$$

Ebenso zeigt man, daß  $x \circ (x \circ (y \circ z))$  in  $Z_{n-3}(G)$  liegt, denn

$$a_1 \circ (\dots \circ (a_{n-3} \circ (x \circ (x \circ (y \circ z)))) \dots) = 1.$$

Wir können nun das vorhergehende Lemma auf  $G/Z_{n-3}(G)$  anwenden und erhalten, daß  $G/Z_{n-3}(G)$  nilpotent der Klasse 3 ist. Also ist  $G$  nilpotent der Klasse  $n$ , was zu zeigen war.

#### Literaturverzeichnis

- [1] F. W. LEVI, Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions. J. Ind. Math. Soc. **2**, 87—97 (1942).
- [2] M. HALL, The Theory of Groups. New York 1959.

Eingegangen am 25. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Hermann Heineken

Mathematisches Seminar der Universität

Frankfurt/Main



## Rings with Minimum Condition on Principal Ideals II

By

CARL FAITH<sup>1)</sup>

If  $A$  is a ring, and if  $S$  is any ideal of  $A$ ,  $S^*$  denotes the twosided annihilator ideal  $\{a \in A \mid aS = Sa = 0\}$  of  $S$  in  $A$ . If  $\mathcal{J}(A) = J$  represents the Jacobson radical of  $A$ , then  $A$  is said to be *bound* if  $J^* \subseteq J$ . M. HALL [4] showed that the structure theory for finite dimensional algebras can be reduced to that of bound algebras; BROWN and MCCOY [2] gave a new proof of this and simultaneously extended it to rings with minimum condition ( $m$ -rings): *Every  $m$ -ring is a direct sum of simple  $m$ -rings and a bound  $m$ -ring*<sup>2)</sup>. They further showed that the sum of the simple direct summands of the  $m$ -ring  $A$  coincides with the maximal regular ideal  $\mathcal{R}(A)$  of  $A$ . Here a ring  $S$  is *regular* in case to each  $s \in S$  there corresponds  $x \in S$  such that  $sxs = s$ ; an ideal  $I$  of a ring  $A$  is *regular* in case  $I$  is a regular ring.

The main result of the present note extends HALL's theorem in its BROWN-MCCOY formulation to  $MP$ -rings, that is, to rings with minimum condition on principal left ideals. In fact we assume only that  $A - \mathcal{J}(A)$  is an  $MP$ -ring, and prove that  $A = R \oplus R^*$ , where  $R$  is either  $= 0$ , or it is a direct sum of simple  $MP$ -rings, and  $R^*$  is a bound ring (cf. Theorem 1 and corollary). Following BROWN and MCCOY,  $R$  is characterized as the maximal regular ideal  $\mathcal{R}(A)$ . It is worthy of note that even when restricted to  $m$ -rings our result represents a sharpening of the BROWN-MCCOY theorem in as much as one need only assume that  $A - \mathcal{J}(A)$  is an  $m$ -ring in order to derive their decomposition.

The maximal regular ideal  $\mathcal{R}(A)$  of  $A$  (exists by [2, Theorem 1] and) has the property [2, Theorem 2] that  $\mathcal{R}(A - \mathcal{R}(A)) = 0$ . Regularity and boundedness are connected by the following basic result [2, Theorem 6].

(1) *If  $A$  is a ring, and if  $A - \mathcal{J}(A)$  is a regular ring, then  $\mathcal{R}(A) = 0$  if and only if  $A$  is bound.*

An easy computation ([2, p. 170]) suffices to prove the following property which is needed below.

(2) *If  $A$  is a ring, and if  $I$  is any regular ideal of  $A$ , then every left (right) ideal of  $I$  is a left (right) ideal of  $A$ .*

Following is the main result of this note.

<sup>1)</sup> This was written during my tenure as North Atlantic Treaty Organization Postdoctoral Fellow (U.S.A.) in the Mathematical Institute, Heidelberg University, while I was on leave from Pennsylvania State University.

<sup>2)</sup> A similar result [1] holds under the minimum condition for twosided ideals.

**Theorem 1.** *If  $A$  is a ring, and if  $A - \mathcal{J}(A)$  is an  $MP$ -ring, then  $A = R \oplus R^*$ , where  $R = \mathcal{R}(A)$  is either  $0$ , or it is a direct sum of simple  $MP$ -rings,  $R^*$  is a bound ring,  $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(R^*) = J$ , and either  $R^* = J$ , or  $R^* - J$  is a direct sum of simple  $MP$ -rings.*

**Proof.** Let  $\bar{R}$  denote the image of  $R = \mathcal{R}(A)$  under the canonical homomorphism  $A \rightarrow \bar{A} = A - \mathcal{J}(A)$ . Since  $\bar{A}$  is a semisimple  $MP$ -ring, it is a direct sum of simple  $MP$ -rings by KAPLANSKY's [6, Theorem 8.1]. Thus  $\bar{A}$ , being a direct sum of regular rings, is regular. Then  $\bar{R}$  is an  $MP$ -ring, since regularity of  $\bar{R}$  together with (2) shows that every left ideal of  $\bar{R}$  is a left ideal of  $\bar{A}$ . Since  $R \cap \mathcal{J}(A) = 0$  (whence  $R\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(A)R = 0$ ),  $R$  is isomorphic to  $\bar{R}$ , so that  $R$  is also an  $MP$ -ring. Consequently  $R$  is a direct sum of simple  $MP$ -rings (which by (2) are simultaneously ideals of  $A$ ). By the uniqueness of the representation of  $\bar{A}$  as a direct sum of simple ideals,  $\bar{R}$  is a direct summand of  $\bar{A}$ . Since the map  $A \rightarrow \bar{A}$  is canonical, this implies the existence of an ideal  $T$  of  $A$  containing  $J = \mathcal{J}(A)$  such that (i)  $A$  is the sum  $R + T$ , and (ii)  $RT \subseteq J$  and  $TR \subseteq J$ . Since  $R^2 = R$ , and since  $RJ = JR = 0$ , this implies that  $RT = TR = 0$ , whence  $T = R^*$ , and  $A = R \oplus R^*$ . This proves the first part. Clearly  $J = \mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(R^*)$ . Since  $\bar{A} = R \oplus (R^* - J)$  is an  $MP$ -ring, so is  $R^* - J$ , so that either  $R^* = J$ , or else  $R^* - J$  is a direct sum of simple  $MP$ -rings. Thus  $R^* - J$  is regular. Since  $\mathcal{R}(R^*) = 0$ , this latter fact together with (1) implies that  $R^*$  is bound, and the proof is complete.

If we impose the full  $MP$  condition on  $A$ , we can say more.

**Corollary 2.** *If  $A$  is an  $MP$ -ring, then  $A$  has the structure of the theorem, and  $J = \mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(R^*)$  is locally nilpotent<sup>3)</sup>.*

The first part follows from the theorem since  $A - J$  is also  $MP$ . That  $J$  is locally nilpotent was established in [3] but not explicitly mentioned. In fact [3, Theorem 1] shows that in an  $MP$ -ring  $A$ ,  $\mathcal{J}(A)$  coincides with the Baer (lower nil) radical of  $A$ , and  $J$  is therefore contained in every nil radical of  $A$ . In particular  $J$  is contained in the Levitzki nil radical (defined to be the sum of all of the locally nilpotent ideals of  $A$ ) so that  $J$  is itself locally nilpotent (cf. [N. JACOBSON, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 37, 1956, p. 197]).

The theorem characterizes the maximal regular ideal of an  $MP$ -ring as either  $0$ , or the sum of the simple  $MP$ -rings which are direct summands. The maximal strongly regular ideal of a ring has been defined [5], it is contained in the maximal regular ideal, and in an  $MP$ -ring, it is either  $0$ , or the sum of division rings which are direct summands. Hence, if  $R$  is a regular  $MP$ -ring, and  $S$  its maximal strongly regular ideal, either  $R = S$ , or  $R - S$  is the direct sum of simple  $MP$ -rings which are not division rings.

Let  $S$  be any semisimple simple ideal of a ring  $A$ , and assume that  $A - J$  is an  $MP$ -ring as in the theorem. Since  $SJ = JS = 0$ , and since  $R^*$  is bound, semisimplicity of  $S$  implies that  $S \not\subseteq R^*$ . Then the fact that  $A = R \oplus R^*$  and the sim-

<sup>3)</sup> A ring is *locally nilpotent* if every finite subset generates a nilpotent subring.



plicity of  $S$  imply that  $S \subseteq R$ . By the uniqueness of the representation of  $R$  as a direct sum of simple  $MP$ -rings, it follows that  $S$  is an  $MP$ -ring, and moreover that  $S$  is a direct summand of  $R$ , whence  $S$  is a direct summand of  $A$ . Thus in a ring  $A$  such that  $A - J$  is  $MP$ ,  $R = \mathcal{R}(A)$  can be characterized as the direct sum of the semisimple simple ideals of  $A$ . Furthermore, in such a ring  $A$  the sum  $\sum_a S_a$  of a non-empty collection of semisimple simple ideals  $\{S_a | a \in U\}$  of  $A$  is a direct summand of  $A$ . This latter fact is related to a kind of question which is also of interest in other algebraic systems: If  $\{S_a | a \in U\}$  is a non-empty collection of direct summands of a ring  $A$ ,  $A = S_a \oplus S'_a$  for each  $a \in U$ , under what conditions on  $A$  is the direct sum  $S = \sum_a S_a$  also a direct summand of  $A$ ? If  $S' = \bigcap_a S'_a$ , then  $A - S'$  is a subdirect sum of the rings  $\{A - S'_a | a \in U\}$ , that is, of the rings  $\{S_a | a \in U\}$ . If  $S$  is a direct summand, then  $A = S \oplus S'$  so that the subdirect sum  $A - S'$  is the direct sum  $S = \sum_a S_a$ . Conversely, suppose that the subdirect sum  $A - S'$  of the  $\{S_a | a \in U\}$  is direct. Since  $A - S'$  is canonically isomorphic to  $S$ , this implies that  $A = S + S'$ , so that  $S$  is a direct summand. Thus, a necessary and sufficient condition in order that the direct sum  $S = \sum_a S_a$  be a direct summand of  $A$  is that the subdirect sum  $A - S'$  of the  $\{S_a | a \in U\}$  be direct. In case each  $S_a$  is a simple  $MP$ -ring, this is equivalent to the requirement that  $A - S'$  be an  $MP$ -ring. In this case  $S'_a = S_a^*$ , and  $S' = S^*$ , so that the result can be expressed as follows.

**Proposition 3.** *Let  $A$  be a ring, and let  $\{S_a | a \in U\}$  be a non-empty collection of simple  $MP$ -rings which are direct summands of  $A$ . Then  $S = \sum_a S_a$  is a direct summand of  $A$  if and only if  $A - S^*$  is an  $MP$ -ring.*

### References

- [1] V. A. ANDRUNAKIEVIC, Rings with minimality condition for ideals. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) **98**, 329—332 (1954) (Russian).
- [2] B. BROWN and N. MCCOY, The maximal regular ideal of a ring. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 165—171 (1950).
- [3] C. FAITH, Rings with minimum condition on principal ideals. Arch. Math. **10**, 327—330 (1959).
- [4] M. HALL, The position of the radical in an algebra. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 391—404 (1940).
- [5] T. KANDO, Strong regularity in arbitrary rings. Nagoya Math. J. **4**, 51—53 (1952).
- [6] I. KAPLANSKY, Topological representations of algebras, II. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 62—75 (1950).

Eingegangen am 13. 4. 1961

Anschrift des Autors:

Carl Faith

School of Mathematics

The Institute for Advanced Study

Princeton (N.J.), USA

## On the Quadratic Reciprocity Theorem

By

ALVIN HAUSNER

**Introduction.** In his recent book [2], L. HOLZER gives a particularly pretty proof of the classical Gaussian quadratic reciprocity theorem. HOLZER's idea is to employ a Gaussian sum over a Galois (finite) field. Similarly, H. HASSE, in his book [1], uses (another version of) the Gaussian sum over the field of rational numbers to prove the reciprocity theorem.

It is the purpose of this brief note to combine the proofs of HASSE and HOLZER and thus arrive at another demonstration of the reciprocity theorem which, we believe, has some interest of its own. In order for the reader to appreciate the features of our proof, he should compare it with those in [1] and [2].

**Proof.** Suppose  $p$  and  $q$  denote distinct odd primes. Introduce  $GF(q)$  which is the field isomorphic to the residue class field of integers mod  $q$ . If  $a$  is an integer not divisible by  $p$  so that  $(a, p) = 1$ , then we put  $(a|p) = \pm e$  according as the congruence  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  is or is not solvable. Similarly, if  $(b, q) = 1$ , put  $(b|q) = \pm e$  according as the congruence  $x^2 \equiv b \pmod{q}$  is or is not solvable. Here,  $e$  is the multiplicative identity in  $GF(q)$ . Observe that  $e \neq -e$  since the characteristic of  $GF(q)$  is  $q \neq 2$ . Since  $(p, q) = 1$ , the equation  $x^p - e = 0$  has  $p$  distinct roots in its root field over  $GF(q)$ . Let  $\zeta$  denote any one of these roots, different from  $e$ . Then  $\zeta$  satisfies the equation  $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + e = 0$ . Adjoin  $\zeta$  to  $GF(q)$  to get the field  $GF_p(q)$ .  $GF_p(q)$  might be identical with  $GF(q)$  and it has characteristic  $q$ .

Consider the Gaussian sum

$$(A) \quad \tau = \sum_{x \not\equiv 0 \pmod{p}} (x|p) \zeta^x.$$

Observe that  $\tau$  is in  $GF_p(q)$ . Raising both sides of equation (A) to the  $q$ -th power gives:

$$\tau^q = \left[ \sum_{x \not\equiv 0 \pmod{p}} (x|p) \zeta^x \right]^q = \sum_{x \not\equiv 0 \pmod{p}} (x|p) \zeta^{qx} = \tau_q \quad \text{def.}$$

because  $GF_p(q)$  has characteristic  $q$  and because  $(x|p)^q = (x|p)$  since  $q$  is odd. With but minor changes in the proof of [1, p. 106], it can be shown that

$$(B) \quad \tau^q = \tau_q = (q|p) \tau.$$

Again, with but slight changes of [1, p. 107], we have:

$$(C) \quad \tau^2 = \left[ (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \right] \times e \neq 0.$$



Here,  $n \times e$ , with  $n$  a natural number, denotes  $e + e + \cdots + e$  to  $n$  summands and  $(-n) \times e = n \times (-e)$ .

Divide both sides of equation (B) by  $\tau \neq 0$  and use equation (C) to get:

$$(D) \quad \tau^{q-1} = (\tau^2)^{\frac{q-1}{2}} = \left\{ \left[ (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \right] \times e \right\}^{\frac{q-1}{2}} = (q|p).$$

In  $GF(q)$ , Euler's criterion gives:

$$(E) \quad \left\{ \left[ (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \right] \times e \right\}^{\frac{q-1}{2}} = \left( (-1)^{\frac{p-1}{2}} p | q \right).$$

Substitution from equation (E) into equation (D) yields:

$$\left( (-1)^{\frac{p-1}{2}} p | q \right) = (q|p)$$

and this is the quadratic reciprocity theorem.

### References

- [1] H. HASSE, Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin 1950.
- [2] L. HOLZER, Zahlentheorie, Teil I. Leipzig 1958.

Eingegangen am 2. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Alvin Hausner  
City College  
New York (N.Y.), USA

## Das große Sieb von LINNIK für algebraische Zahlen

Von

G. J. RIEGER

In einer kürzlich erschienenen Note<sup>1)</sup> habe ich die Methode des großen Siebes von LINNIK zu einem Siebverfahren von ganzen *Idealen* eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  nach *Primidealen* von  $K$  verallgemeinert. In der vorliegenden Note beschäftigen wir uns mit der Aussiebung von ganzen *Zahlen* von  $K$  nach *Primidealen* von  $K$ . Das so entstehende Sieb ist einfacher zu erhalten und scheint mehr Anwendungsmöglichkeiten zu bieten. Wie im Spezialfall des Körpers  $\mathbb{P}$  der rationalen Zahlen<sup>2)</sup> gestattet das hier erzielte Ergebnis (Satz 1) eine einfache statistische Deutung.

Wir bezeichnen mit

$n$  den Grad von  $K$ ,

$\xi, \gamma, \dots$  ganze Zahlen von  $K$ ,

$\mathfrak{f}$  ein ganzes Ideal von  $K$ ,

$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  Primideale von  $K$ ,

$N\xi$  bzw.  $N\mathfrak{f}$  die Norm von  $\xi$  bzw.  $\mathfrak{f}$ ,

$\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  die Konjugierten von  $\xi$ ,

$N(\xi: \dots)$  die Anzahl der ganzen Zahlen  $\xi$  aus  $K$  mit der Eigenschaft  $\dots$ ,

$c_1, \dots$  höchstens von  $K$  abhängige positive Konstante;

die Konstante in  $O(\dots)$  hängt höchstens von  $K$  ab;  $|\xi| < z$  mit einer reellen Zahl  $z \geq 1$  bedeute  $|\xi^{(j)}| \leq z$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

**Hilfssatz 1<sup>3)</sup>.** *Es existiert eine Konstante  $c_1$  derart, daß für alle  $N\mathfrak{f}$  Restklassen  $\gamma \bmod \mathfrak{f}$  von  $K$  gilt*

$$N(\xi: \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < z^{1/n}) = c_1 \frac{z}{N\mathfrak{f}} + O\left(1 + \left(\frac{z}{N\mathfrak{f}}\right)^{1-1/n}\right).$$

Für  $z > c_2 N\mathfrak{f}$  ist also

$$N(\xi: \xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{f}, |\xi| < z^{1/n}) > \frac{c_1 z}{2N\mathfrak{f}}.$$

Wir numerieren nun die ganzen Zahlen  $\xi$  aus  $K$  mit  $|\xi| < 1$  in irgendeiner Weise und setzen diese Numerierung beliebig auf  $|\xi| < 2$ ,  $|\xi| < 3, \dots$  fort;

<sup>1)</sup> Vgl. [3], wo noch einige Druckfehler stehen geblieben sind; in (28) lies  $\xi_1'$  statt  $\xi'$ ; in (29) lies  $+1/2$  statt  $-1/2$ ; in (32) lies  $N\mathfrak{p}^\sigma$  statt  $N^\sigma \mathfrak{p}$ ; in (33) ist vor den beiden Summenzeichen noch  $\sum_{\mathfrak{p}}$  einzufügen; im letzten Glied von (33) und in (34), (38), (40) lies  $2\sigma$  statt  $\sigma$ ; in (41) lies

$\sum \sum Q^{-1}$  statt  $\sum Q^{-1} \sum$ ; in (45) lies  $\sum Q^{-1}$  statt  $Q^{-1} \sum$ .

<sup>2)</sup> Vgl. [2].

<sup>3)</sup> Vgl. [1].



$$Q(z, \gamma \bmod p) \doteq \frac{N(\xi: \xi \equiv \gamma \bmod p, |\xi| < z^{1/n})}{N(\xi: |\xi| < z^{1/n})} \quad 4),$$

$$f(x, z, \gamma \bmod p) \doteq \begin{cases} 1 & \text{für } \xi_{[xN(\eta: |\eta| < z^{1/n})]} \equiv \gamma \bmod p, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$F(x, z, \gamma \bmod p) \doteq \frac{f(x, z, \gamma \bmod p) - Q(z, \gamma \bmod p)}{\sqrt{Q(z, \gamma \bmod p)}};$$

$$\int_0^1 f(x, z, \gamma \bmod p) dx = \int_0^1 f^2(x, z, \gamma \bmod p) dx = Q(z, \gamma \bmod p);$$

ist  $\gamma$  eine Lösung von

$$\gamma \equiv \gamma_1 \bmod p_1,$$

$$\gamma \equiv \gamma_2 \bmod p_2$$

mit  $p_1 \neq p_2$ , so gilt

$$\int_0^1 f(x, z, \gamma_1 \bmod p_1) f(x, z, \gamma_2 \bmod p_2) dx = Q(z, \gamma \bmod p_1 p_2);$$

$$\int_0^1 f(x, z, \gamma_1 \bmod p) f(x, z, \gamma_2 \bmod p) dx = 0 \quad (\gamma_1 \not\equiv \gamma_2 \bmod p).$$

Für  $p_1 \neq p_2$  und  $z > c_2 Np, z > c_2 Np_1, z > c_2 Np_2$  gilt wegen Hilfssatz 1

$$\int_0^1 F^2(x, z, \gamma \bmod p) dx = 1 - Q(z, \gamma \bmod p) = 1 - \frac{1}{Np} + O\left(z^{-1/n} N p^{\frac{1}{n}-1}\right),$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x, z, \gamma_1 \bmod p_1) F(x, z, \gamma_2 \bmod p_2) dx &= \frac{Q(z, \gamma \bmod p_1 p_2) - Q(z, \gamma_1 \bmod p_1) Q(z, \gamma_2 \bmod p_2)}{\sqrt{Q(z, \gamma_1 \bmod p_1) Q(z, \gamma_2 \bmod p_2)}} \\ &= O\left(z^{-1/n} N (p_1 p_2)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x, z, \gamma_1 \bmod p) F(x, z, \gamma_2 \bmod p) dx &= -\sqrt{Q(z, \gamma_1 \bmod p) Q(z, \gamma_2 \bmod p)} \\ &= -\frac{1}{Np} + O\left(z^{-1/n} N p^{\frac{1}{n}-1}\right) \quad (\gamma_1 \not\equiv \gamma_2 \bmod p). \end{aligned}$$

Es sei jetzt  $\{k(1), \dots, k(S)\}$  eine beliebige Teilfolge von  $\{1, \dots, N(\xi: |\xi| < z^{1/n})\}$ ;

$$E(x) \doteq \begin{cases} 1 & \text{für } [xN(\xi: |\xi| < z^{1/n})] + 1 = k(s) \text{ mit einem gewissen } s (s = 1, \dots, S), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\int_0^1 E(x) dx = \int_0^1 E^2(x) dx = \frac{S}{N(\xi: |\xi| < z^{1/n})};$$

$$a(z, \gamma \bmod p) \doteq \int_0^1 E(x) F(x, z, \gamma \bmod p) dx.$$

Für die zunächst noch beliebige Zahl  $A$  mit  $0 < c_2 A < z$  bedeute  $\sum_{Np \leq A}$  Summation über

4)  $\doteq$  bedeutet = per definitionem.

alle Primideale  $\mathfrak{p}$  aus  $K$  mit  $N\mathfrak{p} \leq A$  und  $\sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}}$  Summation über alle  $N\mathfrak{p}$  Restklassen  $\gamma \bmod \mathfrak{p}$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \left( E(x) - \sum_{N\mathfrak{p} \leq A} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} a(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) F(x, z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) \right)^2 dx = \\ &= \int_0^1 E^2(x) dx - \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} a^2(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) \left( 1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}} + O\left(z^{-1/n} N\mathfrak{p}^{\frac{1}{n}-1}\right) \right) + \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2} \sum_{\gamma_1 \bmod \mathfrak{p}_1} \sum_{\gamma_2 \bmod \mathfrak{p}_2} a(z, \gamma_1 \bmod \mathfrak{p}_1) a(z, \gamma_2 \bmod \mathfrak{p}_2) O\left(z^{-1/n} N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\right) + \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\gamma_1 \neq \gamma_2 \bmod \mathfrak{p}} a(z, \gamma_1 \bmod \mathfrak{p}) a(z, \gamma_2 \bmod \mathfrak{p}) \left( -\frac{1}{N\mathfrak{p}} + O\left(z^{-1/n} N\mathfrak{p}^{\frac{1}{n}-1}\right) \right); \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} a^2(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) + \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\gamma_1 \neq \gamma_2 \bmod \mathfrak{p}} a(z, \gamma_1 \bmod \mathfrak{p}) a(z, \gamma_2 \bmod \mathfrak{p}) = \\ &= \sum_{\mathfrak{p}} \left( \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} a(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) \right)^2 \end{aligned}$$

können die Glieder mit  $\frac{1}{N\mathfrak{p}}$  weggelassen werden, und es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 E^2(x) dx - \left( 1 + O\left(z^{-1/n} A^{\frac{1}{n}-1}\right) \right) \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} a^2(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) + \\ &\quad + O\left(z^{-1/n} A^{\frac{2}{n}-1}\right) \left( \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} |a(z, \gamma \bmod \mathfrak{p})| \right)^2. \end{aligned}$$

Mit

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq A} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} a^2(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) \doteq \omega$$

folgt daraus wegen

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq A} 1 = O\left(\frac{A}{\log A}\right)$$

unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$N(\xi: |\xi| < z^{1/n}) \omega \leq 2S$$

für

$$A \leq c_3 (z^{1/n} \log z)^{\frac{n}{n+2}}.$$

Beachten wir noch

$$N(\xi: |\xi| < z^{1/n}) a(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) \sqrt{Q(z, \gamma \bmod \mathfrak{p})} = S(\gamma \bmod \mathfrak{p}) - Q(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) S,$$

$$S(\gamma \bmod \mathfrak{p}) \doteq N(\xi_{k(s)}: \xi_{k(s)} \equiv \gamma \bmod \mathfrak{p}),$$

so ergibt sich

**Satz 1.** Für

$$A \leq c_3 (z^{1/n} \log z)^{\frac{n}{n+2}}$$

gilt

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq A} \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{p}} \frac{(S(\gamma \bmod \mathfrak{p}) - Q(z, \gamma \bmod \mathfrak{p}) S)^2}{Q(z, \gamma \bmod \mathfrak{p})} \leq 2 N(\xi: |\xi| < z^{1/n}) S.$$



Sieht man von der hier nicht näher berechneten Konstanten  $c_3$  ab, so enthält Satz 1 die Hauptungleichung von [2] als Spezialfall. Da die Folgerungen, die man aus Satz 1 ziehen kann, genaue Analoga der Folgerungen aus der Hauptungleichung von [2] sind, gehen wir hier nicht näher auf sie ein. Die Anwendung von Satz 1 gestaltet sich übersichtlicher, wenn man beachtet, daß  $Q(z, \gamma \bmod p)$  bis auf einen Fehler geringerer Größenordnung gleich  $\frac{1}{Np}$  ist.

Satz 1 läßt sich noch leicht dahingehend verallgemeinern, daß man die Auszählung der ganzen Zahlen  $\xi$  nach allgemeineren geometrischen Figuren an Stelle der „Parallelotope“  $|\xi| < z^{1/n}$  vornimmt.

#### Literaturverzeichnis

- [1] H. RADEMACHER, Über die Anwendung der Viggo Brunschen Siebmethode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper. S.-Ber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 211 bis 218 (1923).
- [2] A. RENYI, On the large sieve of Linnik. Compositio Math. 8, 68–75 (1951).
- [3] G. J. RIEGER, Zum Sieb von Linnik. Arch. Math. 11, 14–22 (1960).

Eingegangen am 5. 12. 1960

Anschrift des Autors:

G. J. Rieger  
Department of Mathematics  
Purdue University  
Lafayette (Ind.), USA

## Über die singulären Stellen der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen

Von

RUDOLF GORENFLO

1. Mit Hilfe von Resultaten der Wiman-Valironschen Vergleichsmethode kann man Sätze von VALIRON und WITTICH über die Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen verallgemeinern<sup>1)</sup>.

Es sei

$$P(z, w_0, w_1, \dots, w_n) = \sum_{\kappa_0, \dots, \kappa_n} a_{\kappa_0, \dots, \kappa_n}(z) w_0^{\kappa_0} w_1^{\kappa_1} \cdots w_n^{\kappa_n}, \quad n \geq 1,$$

ein Polynom in den  $w_j$ ; summiert werde nur über diejenigen Indices mit  $a_{\kappa_0, \dots, \kappa_n}(z) \not\equiv 0$ .

$\kappa = \sum_{j=0}^n \kappa_j$  bezeichne die Dimension des Potenzproduktes  $w_0^{\kappa_0} w_1^{\kappa_1} \cdots w_n^{\kappa_n}$ ; das Maximum der endlich vielen Zahlen  $\kappa$  sei  $d$ . Die Funktion  $q(w)$  sei ganz und nichtlinear. Über die Differentialgleichung

$$(1) \quad P(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = q(w)$$

sprechen wir zwei Sätze aus.

**Satz 1.** Sind die Funktionen  $a_{\kappa_0, \dots, \kappa_n}(z)$  holomorph in  $R_0 \leq |z| < \infty$  und in  $z = \infty$  von rationalem Verhalten, so gilt über Lösungen von (1) der Gestalt

$$(2) \quad w(z) = z^\mu f(z), \quad -1 < \Re \mu \leq 0^2), \quad f(z) \text{ holomorph in} \\ R \leq |z| < \infty, \quad R \geq R_0:$$

a) Ist  $q(w)$  ein Polynom vom Grade  $k \geq d + 1$ , so verhält sich in jeder Lösung (2)  $f(z)$  rational in  $z = \infty$ <sup>3)</sup>.

b) Ist  $q(w)$  ganz transzendent, so ist in jeder Lösung (2)  $f(z)$  beschränkt in  $R \leq |z| < \infty$  (also regulär in  $z = \infty$ ).

**Satz 2.** Sind die Funktionen  $a_{\kappa_0, \dots, \kappa_n}(z)$  holomorph in  $0 < |z - a| \leq \varrho_0$ ,  $a \neq \infty$ , und in  $z = a$  von rationalem Verhalten, so gilt über Lösungen von (1) der Gestalt

$$(2') \quad w(z) = (z - a)^\mu f(z), \quad 0 \leq \Re \mu < 1^2), \quad f(z) \text{ holomorph in} \\ 0 < |z - a| \leq \varrho, \quad \varrho \leq \varrho_0:$$

<sup>1)</sup> Man vgl. VALIRON [4] S. 111, [5], [6] S. 222, WITTICH [7] S. 64f., [8] S. 74, GORENFLO [3] S. 72–84 (speziell Sätze 22, 23, 23').

<sup>2)</sup> Diese Beschränkung ist eine zweckmäßige Normierung.

<sup>3)</sup>  $f(z)$  kann in  $z = \infty$  eine Polstelle haben:  $w = 1 + z^2$  löst  $z^4 w'' + zw' + 2w = 2w^2$ .



a') Ist  $q(w)$  ein Polynom vom Grade  $k \geq d + 1$ , so verhält sich in jeder Lösung (2')  $f(z)$  rational in  $z = a$ .

b') Ist  $q(w)$  ganz transzendent, so ist in jeder Lösung (2')  $f(z)$  beschränkt in  $0 < |z - a| \leq \rho$  (also regulär in  $z = a$ ).

Satz 2 folgt aus Satz 1. Die Substitution  $t = 1/(z - a)$  führt (1) über in eine Differentialgleichung der gleichen Bauart und der gleichen Maximaldimension;  $z = a$  entspricht  $t = \infty$ , und mit  $t$  statt  $z$  sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt. Teil a) des Satzes 1 ist eine auf der Hand liegende Verallgemeinerung eines Ergebnisses von VALIRON<sup>4)</sup>.

2. Um Teil b) zu beweisen, kombinieren wir die Idee einer Beweisskizze von VALIRON mit einer von CLUNIE bei der Untersuchung des Anwachsens einer ganzen Funktion einer ganzen Funktion angewandten Methode<sup>5)</sup>. Wir zeigen, daß für jede Funktion (2), in der  $f(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  nicht beschränkt ist, eine Menge von Werten  $\zeta \rightarrow \infty$  existiert derart, daß  $|q(w(\zeta))|$  schneller wächst als  $|P(\zeta, w(\zeta), \dots, w^{(n)}(\zeta))|$ . Dies ist mit (1) nicht verträglich.

Es sei  $|z| = r$ ,  $\arg z = \varphi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ,  $\Re \mu = \alpha$ ,  $\Im \mu = \beta$ ,  $\zeta = ze^t = r \exp(i\varphi + t)$ ,  $\arg \zeta = \varphi^* = \varphi + \Im t$ . Die Potenz  $z^\mu$  bzw.  $\zeta^\mu$  sei eindeutig dargestellt in Abhängigkeit von  $r$ ,  $\varphi$  bzw.  $|\zeta|$ ,  $\varphi^*$ :

$$(3) \quad z^\mu = r^\alpha \exp\{-\beta\varphi + i(\beta \log r + \alpha\varphi)\},$$

$$\zeta^\mu = |\zeta|^\alpha \exp\{-\beta\varphi^* + i(\beta \log |\zeta| + \alpha\varphi^*)\} = z^\mu e^{\mu t}.$$

Damit hängt auch  $w(z)$  bzw.  $w(\zeta)$  eindeutig ab von  $r$ ,  $\varphi$  bzw.  $|\zeta|$ ,  $\varphi^*$ . Im folgenden sei  $r$  stets hinreichend groß und  $z = z(r)$ ,  $\varphi = \varphi(r)$  so gewählt, daß  $|f(z)| = M(r, f) = \max_{|\tau|=r} |f(\tau)|$  ist; ferner sei  $\arg w(z) = \theta$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ , und

$$(4) \quad W(r) = r^\alpha e^{-\beta\varphi} M(r, f),$$

$$Q(W) = M(W, q) = \max_{|w|=W} |q(w)|.$$

Man sieht, daß  $|w(z)| = W(r)$  und  $w(z) = W(r) e^{i\theta}$ . Wir wählen  $\psi$ ,  $-\pi < \psi \leq \pi$ , so, daß  $|q(W(r) e^{i\psi})| = Q(W(r))$  ist. Im weiteren Gang des Beweises unterscheiden wir zwei Fälle:

(A)  $z = \infty$  ist  $\lambda$ -fache Polstelle ( $\lambda \geq 1$ ) für  $f(z)$ .

(B)  $z = \infty$  ist wesentlich singuläre Stelle für  $f(z)$ .

$$3. \text{ Fall (A): } f(z) = \sum_{-\infty}^{\lambda} a_j z^j, \quad \lambda \geq 1, \quad a_\lambda^* \neq 0.$$

Die Größe  $t$  werde beschränkt auf  $|t| < T = \frac{2\pi + 1}{|\lambda + \mu|}$ ; dann ist  $-\pi - T < \varphi^* < \pi + T$ , und  $\zeta = ze^t$  liegt im Kreisring  $re^{-T} < |\zeta| < re^T$ .

Elementare Abschätzungen liefern

<sup>4)</sup> VALIRON [4] S. 111, [6] S. 222, explizit formuliert in WITTICH [7] S. 65.

<sup>5)</sup> VALIRON [5], CLUNIE [2].

$$(5) \quad |P(\zeta, w(\zeta), \dots, w^{(n)}(\zeta))| < r^L, \quad L > 0 \text{ passend,}$$

$$(6) \quad w(\zeta) = (1 + \varepsilon(z, t)) e^{(\lambda + \mu)t} w(z), \quad |\varepsilon(z, t)| < K/r.$$

Man beachte, daß

$$\varepsilon(z, t) = \frac{f(ze^t) - e^{\lambda t} f(z)}{e^{\lambda t} f(z)}$$

holomorph in  $t$  ist.

Es sei nun  $t_0 = \frac{i(\psi - \theta)}{\lambda + \mu}$ , also  $|t_0| < \frac{2\pi}{|\lambda + \mu|}$ . Durch Anwendung des Satzes von ROUCHÉ kann man zeigen, daß

$$h(t) = w(ze^t) - W(r) e^{i\psi}$$

in  $|t - t_0| < \varrho = \frac{1}{|\lambda + \mu|}$  (genau) eine Nullstelle hat. Wegen (6) ist nämlich

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad \text{mit} \quad h_1(t) = e^{(\lambda + \mu)t + i\theta} \{1 - e^{(\lambda + \mu)(t_0 - t)}\} W(r),$$

$$h_2(t) = e^{(\lambda + \mu)t + i\theta} \varepsilon(z, t) W(r);$$

und  $h_1(t)$  hat in  $|t - t_0| < \varrho$  (genau) eine (einfache) Nullstelle, nämlich  $t = t_0$ . Auf  $|t - t_0| = \varrho$  ist

$$|1 - e^{(\lambda + \mu)(t_0 - t)}| \geq c = \min_{-\pi < \tau \leq \pi} |1 - \exp(e^{i\tau})| > 0,$$

aber  $|\varepsilon(z, t)| < c$ , also  $|h_2(t)| < |h_1(t)|$ . Mithin hat  $h(t)$  in  $|t - t_0| < \varrho$  (genau) eine (einfache) Nullstelle.

Aus  $|t - t_0| \leq \varrho$  folgt

$$|t| \leq |t_0| + \varrho < \frac{2\pi + 1}{|\lambda + \mu|} = T$$

in Übereinstimmung mit der getroffenen Beschränkung  $|t| < T$ . Mithin liegt in  $re^{-T} < |\zeta| < re^T$  ein  $\zeta = \zeta(r)$ , mit welchem  $w(\zeta) = W(r) e^{i\psi}$ , also  $|q(w(\zeta))| = |Q(W(r))|$  ist.

Bei  $r \rightarrow \infty$  geht  $W = W(r) \rightarrow \infty$ , und  $Q(W)$  wächst schneller als jede Potenz von  $W$ . Für  $\zeta = \zeta(r)$  liefert eine elementare Abschätzung

$$|w(\zeta)| > r^\gamma, \quad \gamma = (\lambda + \alpha)/2 > 0.$$

Mithin wächst  $Q(W(r)) = |q(w(\zeta))|$  schneller als jede Potenz von  $r$ , wegen (5) also schneller als  $|P(\zeta, w(\zeta), \dots, w^{(n)}(\zeta))|$ .

4. Fall (B):  $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_j z^j$ ,  $g(z) = \sum_0^{\infty} a_j z^j$  ganz transzendent.

$\nu = \nu(r, f)$  sei der Zentralindex<sup>6)</sup> von  $f$ , und  $t$  werde in Abhängigkeit von  $r$  beschränkt auf  $|t| < T = T(\nu) = \frac{2\pi + 1}{\nu}$ ; dann ist  $-\pi - T(\nu) < \varphi^* < \pi + T(\nu)$ , und  $\zeta = ze^t$  liegt im Kreisring  $re^{-T(\nu)} < |\zeta| < re^{T(\nu)}$ .

Bei  $r \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq j \leq n$ , gelten außerhalb einer  $r$ -Ausnahmемenge endlichen logarithmischen Maßes die asymptotischen Beziehungen

<sup>6)</sup> Es ist  $\nu(r, f) = \nu(r, g)$ , da ja  $r$  nach Abschnitt 2 stets hinreichend groß ist.

$$(7') \quad \nu = o(\log^2 M(r, g)),$$

$$(8') \quad g^{(j)}(\zeta) = (1 + o(1)) (\nu/\zeta)^j e^{\nu t} g(z),$$

aus denen

$$(7) \quad \nu = o(\log^2 M(r, f)),$$

$$(8) \quad w^{(j)}(\zeta) = (1 + o(1)) (\nu/\zeta)^j e^{\nu t} w(z)$$

folgt<sup>7)</sup>.  $r$  strebe, die Werte der Ausnahmемenge überspringend, gegen  $\infty$ . Wir notieren noch die aus (8) mit  $j = 0$  folgende spezielle Beziehung

$$(9) \quad w(\zeta) = (1 + \varepsilon(z, t)) e^{\nu t} w(z), \quad |\varepsilon(z, t)| < \delta(r) \rightarrow 0,$$

in der

$$\varepsilon(z, t) = \frac{e^{\mu t} f(z e^t) - e^{\nu t} f(z)}{e^{\nu t} f(z)}$$

holomorph in  $t$  ist, und beachten

$$(10) \quad |w(z)| < C r^\alpha M(r, f).$$

Aus (7) und (8) folgt

$$(11) \quad |P(\zeta, w(\zeta), \dots, w^{(n)}(\zeta))| < M^L(r, f), \quad L > 0 \text{ passend.}$$

Wie in 3. zeigt man nun, daß in  $r e^{-T(\nu)} < |\zeta| < r e^{T(\nu)}$  ein  $\zeta = \zeta(r)$  liegt, mit welchem  $w(\zeta) = W(r) e^{i\nu}$ , also  $|q(w(\zeta))| = Q(W(r))$  ist, und daß der zu  $\zeta$  gehörende Wert  $t$  der Bedingung  $|t| < T(\nu)$  genügt. Hierzu ersetzt man in der dort angestellten Überlegung durchgehend  $\lambda + \mu$  durch  $\nu$  und verwendet (9) statt (6).

Bei  $r \rightarrow \infty$  wächst  $Q(W(r))$  schneller als jede Potenz von  $W(r)$ . Da  $M(r, f)$  schneller wächst als jede Potenz von  $r$ , wächst wegen (4)  $W(r)$  schneller als  $M^\delta(r, f)$ , wenn nur  $\delta < 1$ . Mithin wächst  $Q(W(r)) = |q(w(\zeta))|$  schneller als jede Potenz von  $M(r, f)$ , wegen (11) also schneller als  $|P(\zeta, w(\zeta), \dots, w^{(n)}(\zeta))|$ .

Damit ist Teil b) des Satzes 1 vollständig bewiesen.

### Literaturverzeichnis

- [1] J. CLUNIE, On the determination of an integral function from its Taylor series. J. London Math. Soc. **30**, 32–42 (1955).
- [2] J. CLUNIE, The maximum modulus of an integral function of an integral function. Quart. J. Math., Oxford, II. Ser., **6**, 176–178 (1955).
- [3] R. GORENFLO, Über die Wiman-Valironsche Potenzreihenvergleichsmethode und ihre Anwendung in der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Dissertation Technische Hochschule Karlsruhe 1960.
- [4] G. VALIRON, Lectures on the general theory of integral functions. New York 1949.
- [5] G. VALIRON, Fonctions entières et équations différentielles. Bull. Sci. Math. **76**, 144–148 (1952).

<sup>7)</sup> Wegen (7') vgl. man WITTICH [7] S. 7 die dortige Formel (5), wegen (8') CLUNIE [1] Theorem 8; (7) und (8) sind ausführlich hergeleitet in GORENFLO [3] S. 68ff., man vgl. speziell den dortigen Satz 21. Hinreichend für das Bestehen von (8') und (8) ist die Einschränkung  $|t| < K/\nu$  mit einer beliebigen positiven Konstanten  $K$  und die in Abschnitt 2 geforderte spezielle Lage von  $z$ .



- [6] G. VALIRON, Fonctions analytiques. Paris 1954.
- [7] H. WITTICH, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Springer-Verlag 1955.
- [8] H. WITTICH, Defekte Werte eindeutiger analytischer Funktionen. Arch. Math. **9**, 65—74 (1958).

Eingegangen am 27. 4. 1961

Anschrift des Autors:

Rudolf Gorenflo  
Mathematisches Institut  
Technische Hochschule  
Karlsruhe

# Ein Beitrag zur Lokalisierung von $n$ -Tupeln von Elementen im euklidischen Raum, insbesondere in der komplexen Zahlenebene

Von

HELMUT HEINRICH

**0. Einleitung.** In einer früheren Arbeit [1] ist für die Eigenwerte (charakteristischen Zahlen)  $\lambda_v$  einer beliebigen  $(n, n)$ -Matrix  $A = (a_{jk})$  ( $j, k, v = 1, 2, \dots, n$ ) ein Eingrenzungs- und Verteilungssatz bewiesen worden, der lediglich die folgenden beiden Angaben über die Eigenwerte benutzt:

$$(0.1) \quad \sum_{v=1}^n \lambda_v = \operatorname{Sp}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n a_{jj},$$

$$(0.2) \quad \sum_{v=1}^n |\lambda_v|^2 \leq N^2(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2.$$

(Vgl. SCHUR [2].) Der Satz läßt sich allgemeiner auffassen, als er damals ausgesprochen worden ist, und lautet dann:

**Satz.** Für  $n$  komplexe Zahlen  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , die einzeln nicht bekannt sind, seien die Summe und eine obere Schranke für die Summe der Quadrate der absoluten Beträge vorgegeben:

$$(0.3) \quad \sum_{v=1}^n z_v = S \equiv ns, \quad \sum_{v=1}^n |z_v|^2 \leq R^2 \equiv nr^2 \quad (r^2 \leq |s|^2)$$

( $s$ : Mittelpunkt der Zahlen  $z_v$ ;  $r$ : ihr mittlerer quadratischer Abstand vom Nullpunkt). Dann gelten, wenn wir noch die Werte

$$(0.4) \quad R^{*2} = R^2 - \frac{1}{n} |S|^2 \equiv nr^{*2}, \quad r^{*2} = r^2 - |s|^2 \geq 0$$

eingeführen, über die Eingrenzung und die Verteilung des  $n$ -Tupels  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  folgende Aussagen:

1. Alle  $z_v$  gehören dem Kreisbereich

$$(0.5) \quad \Re: |z - s| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}} R^* \equiv \sqrt{n-1} r^*$$

an.

2. Ist  $0 < m$  (ganz)  $< n$ , so enthält der Kreisbereich

$$(0.6) \quad \Re_m: |z - s| \leq \frac{1}{\sqrt{m+1}} R^* \equiv \sqrt{\frac{n}{m+1}} r^*$$

mindestens  $n - m$  der Zahlen  $z_\nu$ , insbesondere der Kreis

$$(0.6') \quad \Re_{n-1}: |z - s| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} R^* \equiv r^*$$

mindestens ein  $z_\nu$ .

Im Folgenden sollen diese Ergebnisse nach zwei Richtungen hin ausgebaut werden. Erstens werden sie auf den allgemeinen euklidischen Raum, in dem mittels eines Skalarproduktes eine Norm festgelegt ist, übertragen, und in diese Erweiterung wird noch ein Satz von MIRSKY [3] einbezogen, der sich ebenfalls mit der Lokalisierung eines  $n$ -Tupels komplexer Zahlen unter den Voraussetzungen (0.3) beschäftigt und über die gegenseitigen Abstände je zweier Zahlen  $z_\mu, z_\nu$  aussagt:

$$(0.7) \quad \max_{\mu, \nu} |z_\mu - z_\nu| \leq R^* \sqrt{2} \equiv \sqrt{2n} r^*.$$

Zweitens wird im Anschluß an eine unveröffentlichte Arbeit von MAURER [4] das für die komplexen Zahlen  $z_\nu$  in Betracht kommende Gebiet dadurch wesentlich eingegrenzt, daß über die Angaben (0.3) hinaus als weitere Informationsgröße der Wert

$$(0.8) \quad \sum_{\nu=1}^n z_\nu^2 = n \sigma^2$$

als bekannt vorausgesetzt wird<sup>1)</sup>).

**1. Die Erweiterung auf den euklidischen Raum<sup>2)</sup>.**  $\Re$  sei ein euklidischer Raum, in dem in der üblichen Weise für je zwei Elemente  $x, y$  ein Skalarprodukt  $(x, y)$  und mit dessen Hilfe für jedes Element  $x$  eine Norm  $|x| = \sqrt{(x, x)}$  erklärt wird<sup>3)</sup>.  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sei ein  $n$ -Tupel von Elementen von  $\Re$ , die einzeln nicht bekannt sind, für die aber der „Mittelpunkt“

$$(1.1) \quad s = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n x_\nu \in \Re$$

festliegt und für deren mittleren quadratischen Abstand  $r_0$  vom Nullelement, der durch

$$(1.2) \quad r_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^2 \quad (r_0^2 \geq |s|^2)$$

definiert ist, wenigstens eine obere Schranke  $r$  gegeben ist:

$$(1.3) \quad r \geq r_0.$$

Setzen wir dann

$$(1.4) \quad r^2 - |s|^2 = r^{*2},$$

<sup>1)</sup> Falls die Zahlen  $z_\nu$  die Eigenwerte  $\lambda_\nu$  einer Matrix  $A$  sind, ist

$$\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^2 = \text{Sp}(A^2) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} a_{kj}.$$

<sup>2)</sup> Bezüglich der im Folgenden benutzten Terminologie vgl. z. B. [5], S. 121.

<sup>3)</sup> Ist  $\Re$  die komplexe Zahlenebene, so ist unter dem skalaren Produkt  $(z_1, z_2)$  das Produkt  $z_1 \bar{z}_2$  zu verstehen. Es ist dann  $|z|^2 = (z, z) = z \bar{z}$ .



so gelten über die Lokalisierung der Elemente  $x_\nu$  in  $\mathfrak{R}$  folgende zu (0.5), (0.6) und (0.7) analogen Aussagen:

1. *Eingrenzung: Alle  $x_\nu$  gehören der Kugel*

$$(1.5) \quad \mathfrak{R}: |x - s| \leq \sqrt{n-1} r^*$$

an.

2. *Verteilung: Ist  $0 < m$  (ganz)  $< n$ , so enthält die Kugel*

$$(1.6) \quad \mathfrak{R}_m: |x - s| \leq \sqrt{\frac{n}{m+1}} r^*$$

mindestens  $n - m$  Elemente  $x_\nu$ , insbesondere die Kugel

$$(1.6') \quad \mathfrak{R}_{n-1}: |x - s| \leq r^*$$

mindestens ein  $x_\nu$ .

3. *Satz von MIRSKY: Für die gegenseitigen Abstände je zweier Elemente  $x_\mu$  und  $x_\nu$  des  $n$ -Tupels gilt*

$$(1.7) \quad \max_{\mu, \nu} |x_\mu - x_\nu| \leq \sqrt{2n} r^*.$$

1.1. **Beweis des Eingrenzungssatzes.** Aus den Bedingungen und Definitionen (1.1) bis (1.4) folgt zunächst

$$(1.8) \quad \sum_1^n |x_\nu - s|^2 = n(r_0^2 - |s|^2) \leq n r^{*2}.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \sum_1^n |x_\nu - s|^2 &= \sum_1^n (x_\nu - s, x_\nu - s) = \sum_1^n (|x_\nu|^2 - (x_\nu, s) - (s, x_\nu) + |s|^2) = \\ &= n r_0^2 - 2n(s, s) + n|s|^2 = n r_0^2 - n|s|^2. \end{aligned}$$

Denkt man sich nun die Elemente  $x_\nu$  so numeriert, daß

$$(1.9) \quad |x_n - s| \geq |x_\nu - s| \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1)$$

ist, und berücksichtigt man, daß nach der Schwarzischen Ungleichung

$$(n-1) \sum_1^{n-1} |x_\nu - s|^2 \geq \left( \sum_1^{n-1} |x_\nu - s| \right)^2$$

und nach der Dreiecksungleichung und nach (1.1)

$$\sum_1^{n-1} |x_\nu - s| \geq \left| \sum_1^{n-1} (x_\nu - s) \right| = |x_n - s|$$

ist, so ergibt sich aus (1.8)

$$\begin{aligned} n r^{*2} &\geq \sum_1^{n-1} |x_\nu - s|^2 + |x_n - s|^2 \geq \frac{1}{n-1} \left( \sum_1^{n-1} |x_\nu - s| \right)^2 + |x_n - s|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{n-1} |x_n - s|^2 + |x_n - s|^2 = \frac{n}{n-1} |x_n - s|^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst für  $x_n$ , dann aber wegen (1.9) erst recht für alle anderen  $x_v$  die Behauptung (1.5):

$$|x_v - s| \leq \sqrt{n-1} r^* \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

**1.2. Beweis des Verteilungssatzes.** Für  $n$  nicht-negative Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , für die

$$\sum_1^n p_v \leq C$$

vorgeschrieben ist, gilt stets der folgende einfache

**Hilfssatz<sup>4)</sup>.** Ist  $0 < m$  (ganz)  $< n$ , so liegen im abgeschlossenen Intervall  $J_m = [0, C/(m+1)]$  mindestens  $n - m$  der Zahlen  $p_v$ .

Es sei nämlich  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ . Wir nehmen an, daß genau  $k$  der Zahlen  $p_v$  zu  $J_m$  gehören. Dann ist

$$\frac{C}{m+1} < p_{k+1} \leq \dots \leq p_n.$$

$$0 \leq \sum_1^k p_v \leq C - \sum_{k+1}^n p_v < C - (n-k) \frac{C}{m+1} = \frac{k+m+1-n}{m+1} C.$$

Daraus folgt, daß notwendig  $k > n - (m+1)$ , d. h.  $k \geq n - m$  sein muß. Setzt man

$$p_v = |x_v - s|^2 \quad \text{und} \quad C = n r^{*2},$$

so liefert der Hilfssatz unmittelbar die Aussage des Verteilungssatzes.

**1.3. Beweis des Satzes von MIRSKY für den allgemeinen euklidischen Raum.** Der für komplexe Zahlen  $z_v$  gültige Beweis der Ungleichung (0.7) [vgl. dazu z. B. PARODI [6]] bedarf für unsere Verallgemeinerung nur einer geringfügigen Abänderung. Zunächst gilt die Identität

$$(1.10) \quad \sum_{\mu < v} |x_\mu - x_v|^2 = n \sum_1^n |x_v - s|^2.$$

Setzen wir nämlich vorübergehend  $x_v - s = y_v$ , so daß  $\sum_1^n y_v = 0$  ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\mu < v} |x_\mu - x_v|^2 &= \sum_{\mu < v} |y_\mu - y_v|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq v} |y_\mu - y_v|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n |y_\mu - y_v|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n (|y_\mu|^2 - (y_\mu, y_v) - (y_v, y_\mu) + |y_v|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n (|y_\mu|^2 + |y_v|^2) = 2 \cdot \frac{n}{2} \sum_1^n |y_v|^2. \end{aligned}$$

Nimmt man jetzt wie MIRSKY a. a. O. an, daß die Elemente  $x_v$  so numeriert sind, daß

<sup>4)</sup> Dieser Satz gilt sinngemäß auch für unendliche Zahlenfolgen  $\{p_v\}$  mit nicht negativen Gliedern in der Form, daß außerhalb  $J_m$  höchstens  $m$  Zahlen  $p_v$  liegen.

$$(1.11) \quad |x_{n-1} - x_n| = \max_{\mu, \nu} |x_\mu - x_\nu| \stackrel{\text{def}}{=} M$$

ist, und definiert man, indem man seinen Ansatz geringfügig abändert, zu jedem Element  $x_\nu$  ein Element

$$(1.12) \quad t_\nu = \frac{1}{M} (2x_\nu - x_{n-1} - x_n) \in \mathbb{R},$$

so wird

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{M} (x_n - x_{n-1}), & |t_n| &= 1, \\ t_{n-1} &= \frac{1}{M} (x_{n-1} - x_n) = -t_n, & |t_{n-1}| &= 1, \\ t_n - t_{n-1} &= 2t_n, & |t_n - t_{n-1}| &= 2, \\ t_\mu - t_\nu &= \frac{2}{M} (x_\mu - x_\nu). \end{aligned}$$

Danach ist

$$\begin{aligned} n^2 r^{*2} &\geq n \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - s|^2 = \sum_{\mu < \nu} |x_\mu - x_\nu|^2 = \frac{M^2}{4} \sum_{\mu < \nu} |t_\mu - t_\nu|^2 \geq \\ &\geq \frac{M^2}{4} \left\{ \sum_{\mu=1}^{n-2} |t_\mu - t_{n-1}|^2 + \sum_{\mu=1}^{n-1} |t_\mu - t_n|^2 \right\} = \\ &= \frac{M^2}{4} \left\{ \sum_{\mu=1}^{n-2} (|t_\mu - t_{n-1}|^2 + |t_\mu - t_n|^2) + |t_{n-1} - t_n|^2 \right\} = \\ &= \frac{M^2}{4} \left\{ \sum_{\mu=1}^{n-2} (2|t_\mu|^2 - (t_\mu, t_{n-1} + t_n) - (t_{n-1} + t_n, t_\mu) + |t_{n-1}|^2 + |t_n|^2) + 4 \right\} = \\ &= \frac{M^2}{2} \left\{ \sum_{\mu=1}^{n-2} |t_\mu|^2 + (n-2) \cdot 1 + 2 \right\} \geq \frac{n M^2}{2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung:

$$M = \max_{\mu, \nu} |x_\mu - x_\nu| \stackrel{\text{def}}{\leq} \sqrt{2 \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - s|^2} \leq \sqrt{2n} r^*.$$

**2. Verschärfung der Eingrenzung in der komplexen Zahlenebene.** Die verbesserte Eingrenzung, die MAURER a. a. O. durch Hinzunahme des Wertes  $\sum_{\nu=1}^n z_\nu^2$  zu den als bekannt vorausgesetzten Werten erzielt hat, besteht in der folgenden Aussage:

**2.1.** Weiß man von  $n$  komplexen Zahlen  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , die einzeln nicht bekannt sind, lediglich daß

$$(2.1) \quad \sum_{\nu=1}^n z_\nu = ns, \quad \sum_{\nu=1}^n z_\nu^2 = n\sigma^2, \quad \sum_{\nu=1}^n |z_\nu|^2 \leq nr^2$$

ist, wobei die Nebenbedingungen

$$(2.2) \quad r^{*2} \stackrel{\text{def}}{=} r^2 - |s|^2 \geq 0, \quad \sigma^{*2} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma^2 - s^2| \leq r^{*2}$$



erfüllt sein müssen, so liegen, wenn noch der Winkel  $\varphi_0$  durch

$$(2.3) \quad \sigma^2 - s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{*2} e^{2i\varphi_0}$$

festgesetzt wird, alle  $z_\nu$  in dem abgeschlossenen Bereich  $\mathfrak{G}$ , der nach außen durch die Ellipse begrenzt wird, die den Punkt  $s$  als Mittelpunkt hat und deren Halbachsen die Längen

$$(2.4) \quad a = \sqrt{\frac{n-1}{2} (r^{*2} + \sigma^{*2})}, \quad b = \sqrt{\frac{n-1}{2} (r^{*2} - \sigma^{*2})}$$

haben und gegen die reelle Achse unter den Winkeln  $\varphi_0$  bzw.  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  geneigt sind.

**2.2.** Der Beweis werde hier anders und wesentlich kürzer als in [4] geführt. Zunächst gehen wir zur Vereinfachung der Rechnung von den komplexen Zahlen  $z$  zu den komplexen Zahlen

$$(2.5) \quad \zeta = (z - s) e^{-i\varphi_0}$$

über. An die Stelle der Voraussetzungen (2.1) treten dann für das entsprechende  $n$ -Tupel  $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  die Bedingungen

$$(2.6) \quad \sum_1^n \zeta_\nu = 0, \quad \sum_1^n \zeta_\nu^2 = n \sigma^{*2} \geq 0 \text{ (reell)}, \quad \sum_1^n |\zeta_\nu|^2 \leq n r^{*2}$$

oder stattdessen — mit (2.4) — :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \sum_1^n \zeta_\nu = 0, \\ \sum_1^n (|\zeta_\nu|^2 + \zeta_\nu^2) \leq n(r^{*2} + \sigma^{*2}) = \frac{2n}{n-1} a^2, \\ \sum_1^n (|\zeta_\nu|^2 - \zeta_\nu^2) \leq n(r^{*2} - \sigma^{*2}) = \frac{2n}{n-1} b^2. \end{cases}$$

Die im Satz genannte Randellipse erhält, wenn wir  $\zeta = \xi + i\eta$  setzen, die Gleichung

$$(2.8) \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Wir führen nun noch durch

$$(2.9) \quad \xi = au, \quad \eta = bv$$

die neuen Koordinaten  $u, v$  ein. In diesen ist der elliptische Bereich  $\mathfrak{G}$  durch  $u^2 + v^2 \leq 1$  gekennzeichnet, während die Bedingung (2.7) in die folgenden übergeht:

$$(2.10) \quad \begin{cases} \sum_1^n u_\nu = 0, \quad \sum_1^n v_\nu = 0, \\ \sum_1^n u_\nu^2 \leq \frac{n}{n-1}, \quad \sum_1^n u_\nu v_\nu = 0, \quad \sum_1^{n-1} v_\nu^2 \leq \frac{n}{n-1}. \end{cases}$$

Unser Satz ist daher bewiesen, sobald gezeigt ist, daß aus diesen Bedingungen für

alle  $\nu = 1, 2, \dots, n$

$$(2.11) \quad u_\nu^2 + v_\nu^2 \leq 1$$

folgt.

Zunächst ergibt sich aus (2.10) für jeden beliebigen Winkel  $\alpha$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[ \sum_1^n (u_\nu \cos \alpha + v_\nu \sin \alpha) \right]^2 = \\ &= (u_n \cos \alpha + v_n \sin \alpha)^2 + 2(u_n \cos \alpha + v_n \sin \alpha) \sum_1^{n-1} (u_\nu \cos \alpha + v_\nu \sin \alpha) + \\ &\quad + \left[ \sum_1^{n-1} (u_\nu \cos \alpha + v_\nu \sin \alpha) \right]^2. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\sum_1^{n-1} u_\nu = -u_n \quad \text{und} \quad \sum_1^{n-1} v_\nu = -v_n$$

ist, und wenden wir auf den letzten Term die Schwarzsche Ungleichung an, so erhalten wir

$$0 \leq -(u_n \cos \alpha + v_n \sin \alpha)^2 + (n-1) \sum_1^{n-1} (u_\nu \cos \alpha + v_\nu \sin \alpha)^2.$$

Nun ist nach (2.10)

$$\sum_1^{n-1} u_\nu^2 \leq \frac{n}{n-1} - u_n^2, \quad \sum_1^{n-1} u_\nu v_\nu = -u_n v_n, \quad \sum_1^{n-1} v_\nu^2 \leq \frac{n}{n-1} - v_n^2.$$

Daher ist weiter

$$\begin{aligned} 0 &\leq -(u_n \cos \alpha + v_n \sin \alpha)^2 + \\ &\quad + (n-1) \left[ \left( \frac{n}{n-1} - u_n^2 \right) \cos^2 \alpha - 2u_n v_n \sin \alpha \cos \alpha + \left( \frac{n}{n-1} - v_n^2 \right) \sin^2 \alpha \right] = \\ &= (n - nu_n^2) \cos^2 \alpha - 2nu_n v_n \sin \alpha \cos \alpha + (n - nv_n^2) \sin^2 \alpha = \\ &= n[1 - (u_n \cos \alpha + v_n \sin \alpha)^2], \end{aligned}$$

d. h.

$$(2.12) \quad (u_n \cos \alpha + v_n \sin \alpha)^2 \leq 1.$$

Über die Numerierung der  $z_\nu$  und damit auch der  $(u_\nu, v_\nu)$  ist nichts vorausgesetzt worden. Daher gilt das Ergebnis (2.12) für jedes  $(u_\nu, v_\nu)$ , ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ). Es bedeutet:

Für jeden Winkel  $\alpha$ <sup>5)</sup> enthält der Parallelstreifen

$$(2.13) \quad -1 \leq u \cos \alpha + v \sin \alpha \leq 1,$$

dessen Randgeraden vom Nullpunkt den Abstand 1 haben und die imaginäre Achse unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, alle Punkte  $(u_\nu, v_\nu)$ . Daher muß auch der allen diesen

<sup>5)</sup> Es genügt, sich auf den Bereich  $0 \dots \pi$  zu beschränken.

Streifen gemeinsame Bereich, ihr Durchschnitt, alle  $(u_\nu, v_\nu)$  enthalten. Dies ist aber gerade der Einheitskreis  $u^2 + v^2 = 1$ , der dem elliptischen Bereich  $\mathfrak{G}$  der  $z$ -Ebene entspricht. Damit ist der Eingrenzungssatz bewiesen.

2.3. Eine Anwendung des in 1.2 hergeleiteten und für den Beweis des Verteilungssatzes benutzten Hilfssatzes bringt wenig Gewinn. Man müßte auf die in (2.10) enthaltenen Ungleichungen zurückgehen, die man in der Form

$$\sum_1^n \xi_\nu^2 \leq \frac{na^2}{n-1}, \quad \sum_1^n \eta_\nu^2 \leq \frac{nb^2}{n-1}$$

schreiben kann, und erhielte mit  $p_\nu = \xi_\nu^2$  bzw.  $q_\nu^2 = \eta_\nu^2$  und mit  $C = \frac{na^2}{n-1}$  bzw.  $\frac{nb^2}{n-1}$  lediglich folgendes Ergebnis:

1. Ist  $0 < m$  (ganz)  $< n$ , so enthält das Intervall

$$\mathfrak{X}_m: |\xi| \leq a \sqrt{\frac{n}{(n-1)(m+1)}}$$

mindestens  $n - m$  der Zahlen  $\xi_\nu$ , das Intervall

$$\mathfrak{Y}_m: |\eta| \leq b \sqrt{\frac{n}{(n-1)(m+1)}}$$

mindestens  $n - m$  der Zahlen  $\eta_\nu$ . Damit ist aber über die Lokalisierung der Zahlen  $\xi_\nu$ , wenig ausgesagt, weil die Werte  $\xi_\nu$ , die in  $\mathfrak{X}_m$  liegen, nicht die Realteile derselben Zahlen  $\xi_\nu$  zu sein brauchen, deren Imaginärteile  $\eta_\nu$  in  $\mathfrak{Y}_m$  liegen. Es ist aber selbstverständlich möglich, den neuen Eingrenzungssatz mit dem in der Einleitung angeführten Verteilungssatz zu vereinigen und den folgenden Satz zu formulieren:

Da  $\mathfrak{G}$  alle  $z_\nu$  und der Kreisbereich  $\mathfrak{K}_m$  mindestens  $n - m$  der  $z_\nu$  enthält, liegen mindestens  $n - m$  Zahlen  $z_\nu$  in dem aus  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{K}_m$  gebildeten Durchschnitt.

2.4. Die Wirksamkeit der MAURERSchen Eingrenzung werde an dem Beispiel der Eigenwerte  $\lambda_\nu$  einer hermiteschen Matrix  $A$  gezeigt. Während die ursprüngliche Eingrenzung (0.5) für die Eigenwerte  $\lambda_\nu$  einen Kreis liefert, ergibt die neue den auf der reellen Achse liegenden Durchmesser dieses Kreises, d. h. sie berücksichtigt voll die Reellität der Eigenwerte, ohne sie zusätzlich voraussetzen zu müssen.

Es ist nämlich

1.  $ns = \sum_1^n \lambda_\nu = \text{Sp}(A)$  reell und daher  $|s|^2 = s^2$ .

2. Da  $A$  normal ist, gilt in der Schurschen Ungleichung das Gleichheitszeichen, und es ist

$$\begin{aligned} nr^2 &\equiv N^2(A) = \sum_1^n |\lambda_\nu|^2 = \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \bar{a}_{jk} = \\ &= \sum_{j,k=1}^n a_{jk} a_{kj} = \text{Sp}(A^2) = \sum_1^n \lambda_\nu^2 = n\sigma^2, \end{aligned}$$

d. h.

$$r^2 = \sigma^2, \quad r^{*2} = r^2 - |s|^2 = \sigma^2 - s^2 = \sigma^{*2}, \quad \varphi_0 = 0.$$



Für die Halbachsen der Ellipse ergibt sich somit

$$a = \sqrt{n-1} r^*, \quad b = 0:$$

die Ellipse  $\mathcal{G}$  artet in das Intervall  $[s - \sqrt{n-1} r^*, s + \sqrt{n-1} r^*]$  der reellen Achse aus.

Auf weitere Anwendungen wird an anderer Stelle eingegangen werden.

#### Literaturverzeichnis

- [1] H. HEINRICH, Zur Eingrenzung der charakteristischen Zahlen einer beliebigen Matrix. Wiss. Z. TH Dresden **6**, 211–216 (1956/57).
- [2] I. SCHUR, Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. Math. Ann. **66**, 488–501 (1909).
- [3] L. MIRSKEY, The spread of a matrix. Mathematica **3**, 127–130 (1956).
- [4] V. MAURER, Über die Eingrenzung der charakteristischen Zahlen beliebiger Matrizen. Dipl.-Arbeit, Inst. f. Angew. Math. TH Dresden, 1960.
- [5] M. A. NEUMARK, Lineare Differentialoperatoren. Berlin 1960.
- [6] M. PARODI, La localisation des valeurs caracteristiques des matrices et ses applications. Paris 1959.

Eingegangen am 8. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Helmut Heinrich

Dresden A 27

Friedrich-Hegel-Straße 31

## On the Lattice of Normal Functions on a Totally Disconnected Compact Space

By

TENG-SUN LIU and JU-KWEI WANG

1. Let  $X$  be a compact Hausdorff space. If  $f$  is a real-valued function on  $X$ , then we write  $f_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$  and  $f^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$ . The function  $f$  will be called a *normal function* if  $(f_*)^* = f$ .

The concept of normal functions arose naturally as follows: Let a lattice  $C$  be given. Then a subset  $A$  of  $C$  is said to be *normal* if  $A$  contains every element of  $C$  which is not less than every lower bound of  $A$ . Let  $N$  be the set of all normal subsets of  $C$  and in  $N$  we define the order  $A \leq B$  to mean that  $A$  includes  $B$  as a subset. Under this order  $N$  becomes a complete lattice including an isomorphic image of  $C$  as a sublattice.  $N$  is called the *normal completion* of the lattice  $C$ . Now let's come back to our original problem. Let  $C(X)$  and  $N(X)$  be the set of all continuous functions and the set of all normal functions on the space  $X$  respectively. R. P. DILWORTH [1] proved that  $N(X)$  is isomorphic to the normal completion of  $C(X)$ .

There is yet another representation for  $N(X)$ . A compact Hausdorff space in which the closure of every open set is still open is called a *Stone space*. M. H. STONE [4] proved that for any given complete Boolean algebra  $R$ , there exists a Stone space  $X'$  such that  $R$  is isomorphic to the Boolean algebra of all clopens (i.e. closed and open sets) in  $X'$ . STONE's construction is as follows: the points of  $X'$  are actually the prime dual ideals of  $R$ , and the topology of  $X'$  is defined by the basis whose elements  $H_G$  are the sets of those prime dual ideals of  $R$  which contain a given element  $G$  of  $R$ . Now it is well known (see [2]) that the regular open sets of the given topological space  $X$  form a complete Boolean algebra  $R(X)$ . Let  $X'$  be the Stone space corresponding to  $R(X)$ . DILWORTH [1] also proved that  $N(X)$  is isomorphic to the lattice  $C(X')$  of all real-valued continuous functions on  $X'$ . Further, the isomorphism  $\sigma: N(X) \rightarrow C(X')$  is given explicitly by

$$(\sigma f)(x') = \inf_{G \in x'} \sup_{x \in G} f(x),$$

where  $G$  stands for regular open sets of  $X$ .

It is our purpose in this paper to investigate the relationship between the spaces  $X$  and  $X'$ . From here on, unless otherwise stated, we will assume that  $X$  is *totally disconnected*. Using the notations introduced so far, we can formulate our results in the following two main theorems:

**Theorem I.** *There is a continuous open map  $s$  of  $X'$  onto  $X$ .*

**Theorem II.** *For any compact Hausdorff space  $X''$  such that  $N(X)$  is embeddable into  $C(X'')$  as a sublattice,  $X'$  is a continuous image of  $X''$ .*

2. The map  $s$  in theorem I is constructed as follows: Take  $x' \in X'$ , and consider  $x'$  as a prime dual ideal of  $R(X)$ . Since  $X$  is totally disconnected, the clopens in  $X$  form a basis. Thus for each  $G \in x'$ ,  $\bar{G}$  is the intersection of all the clopens  $F$  which contain  $G$ . As all such clopens belong to  $x'$ , we see that  $\bigcap_{G \in x'} \bar{G} = \bigcap_{F \in x'} F$ , where  $F$  ranges over all the clopens in  $x'$  only. Now for any finite number of clopens  $F_1, F_2, \dots, F_n$  in  $x'$ , their intersection  $\bigcap_{i=1}^n F_i$  is again a member of the prime dual ideal  $x'$ ; hence is not empty. Since  $X$  is compact, the intersection  $\bigcap_{F \in x'} F \neq \emptyset$ . We claim further that it contains a unique point. For if it contains two distinct points  $x$  and  $y$ , then there is a clopen  $F$  containing  $x$  but excluding  $y$ . As  $x'$  is a prime dual ideal, either  $F$  or its complement belongs to  $x'$ . But either possibility involves a contradiction. Thus  $\bigcap_{G \in x'} \bar{G}$  contains a unique point  $x$ , which will be defined to be  $s(x')$ .

We have to show that the map  $s$  so obtained is surjective, continuous and open. To prove surjectivity, take  $x \in X$  and consider the set  $\{G \in R(X) : x \in G\}$ . Evidently this is a dual ideal of  $R(X)$ . By ZORN's lemma we can extend it to a prime dual ideal  $x'$ . Clearly  $s(x') = x$ .

To prove the continuity, suppose that  $s(x'_0) = x_0$ . Let  $F$  be any clopen in  $X$  containing  $x_0$ . Then the set  $H_F$  described in section I is a neighborhood of  $x'_0$ . Because for any point  $x' \in X'$ ,  $s(x') \in F$  if and only if  $F \in x'$ , we see that  $s(H_F) \subset F$ . Hence  $s$  is continuous. A similar argument shows that  $s$  is open, and theorem I is thus proved.

3. Theorem II is an immediate consequence of the following result which generalizes a theorem of I. KAPLANSKY [3]:

**Theorem III.** *Let  $X$  and  $X'$  be two compact Hausdorff spaces. Then  $X$  is a continuous image of  $X'$  if and only if the lattice  $C(X)$  is embeddable in  $C(X')$  as a sublattice; or in symbols, if there exists a surjective continuous map  $p: X' \rightarrow X$ , then there exists an injective lattice-isomorphism  $i: C(X) \rightarrow C(X')$ , and conversely.*

**Proof.** Suppose first that  $p$  is given. Then for  $f \in C(X)$ , we define  $i(f) = f \circ p \in C(X')$ . Since  $p$  is surjective,  $i$  is injective. It is obvious that  $i$  preserves order, and hence is an isomorphism.

To prove the converse, suppose now that  $i$  is given. Let  $x' \in X'$ . Consider a prime ideal in  $C(X')$  associated with  $x'$ : by this we mean that if  $f'$  is in this prime ideal and if  $g'(x') < f'(x')$ , then  $g'$  is also in this prime ideal. We claim that there exist such prime ideals  $P'$  with the property that  $P' \cap iC(X)$  is non-empty, thus for any  $f \in C(X)$ , the set  $\{f' \in C(X') : f'(x') \leq (if)(x')\}$  is an example. Let  $P = i^{-1}(P' \cap iC(X))$ . Then  $P$  is a prime ideal in  $C(X)$ . By a result of KAPLANSKY [3],  $P$  is associated with a unique point  $x \in X$ . We define now that  $p(x') = x$ . As KAPLANSKY also proved that two prime ideals are associated with the same point if and only if their intersection contains a third prime ideal, this definition is independent of the choice of  $P'$ .



Next we show that  $p$  is surjective. Thus let  $x \in X$  be given, and let  $P$  be a prime ideal of  $C(X)$  associated with  $x$ . By ZORN's lemma we can construct a prime ideal  $P' \subset C(X')$  containing  $iP$ . If  $P'$  is associated with  $x'$ , then  $p(x') = x$ .

Finally, to show that  $p$  is continuous, we make use of KAPLANSKY's crucial lemma that a point  $\tilde{x}$  in a compact Hausdorff space  $\tilde{X}$  is in the closure of a subset  $\tilde{E} \subset \tilde{X}$  if and only if  $\tilde{A}(\tilde{E})$  is contained in a prime ideal of  $C(\tilde{X})$  associated with  $\tilde{x}$ , where  $\tilde{A}(\tilde{E})$  is defined to be the intersection of all prime ideals containing a preassigned function  $\tilde{f} \in C(\tilde{X})$  and being associated with points in  $\tilde{E}$ . Let  $E' \subset X'$  and  $x' \in \overline{E'}$ . Then there exists a prime ideal  $P'$  in  $C(X')$  associated with  $x'$  such that  $A'(E') \subset P'$ . If we selected the relevant  $f'$  to be  $if$  for some  $f \in C(X)$ , then it is easy to check that

$$i^{-1}(A'(E') \cap iC(X)) = A(p(E')).$$

Evidently,  $A(p(E')) \subset P = i^{-1}(P' \cap iC(X))$ . Hence  $p(x') \in \overline{p(E')}$ , because  $P$  is a prime ideal associated with  $p(x')$ . Thus  $p$  is continuous.

4. As a by-product, we get a number of characterizations of Stone spaces. We state them, with the aid of the previous notations, in the

**Theorem IV.** *For a totally disconnected compact Hausdorff space  $X$ , the following conditions are equivalent:*

- i.  $X$  is a Stone space.
- ii.  $s$  is bijective.
- iii. *For any two distinct elements  $x'_1, x'_2$  of  $X'$ , there are regular open sets  $G_1 \in x'_1, G_2 \in x'_2$  such that  $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$ .*
- iv. *Every regular open set is a clopen.*
- v. *For every  $f \in N(X)$ ,  $\sigma f = f \circ s$ .*

**Proof.** Our procedure is to prove the following implications:  $i \Rightarrow iv, ii \Rightarrow i, ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv \Rightarrow v \Rightarrow ii$ . Among these the first two are obvious. The other implications are indicated as follows:

$ii \Rightarrow iii$ . Suppose that  $iii$  fails. Then there exist distinct elements  $x'_1, x'_2 \in X'$  such that for all regular open sets  $G_1 \in x'_1, G_2 \in x'_2$ , we always have  $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 \neq \emptyset$ . In particular,  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$  for all clopens  $F_1 \in x'_1, F_2 \in x'_2$ . This implies that the set of all clopens in either  $x'_1$  or  $x'_2$  has the finite intersection property. Hence both  $s(x'_1)$  and  $s(x'_2)$  are in their intersection. As it cannot contain more than one point, we have  $s(x'_1) = s(x'_2)$  and  $s$  cannot be bijective.

$iii \Rightarrow iv$ . Suppose that  $iv$  fails. Then there exists a regular open set  $G$  which is not closed. Take  $x \in \overline{G} - G$ . Since every regular open set containing  $x$  intersects  $G$ , by ZORN's lemma there exists a prime dual ideal  $x'_1$  containing  $G$  as well as every such regular open set. Now let  $G^*$  be the interior of the complement of  $G$ . Then  $x \in \overline{G^*} - G^*$ . By a parallel argument as above, there exists  $x'_2 \in X'$  with a similar property. Obviously  $s(x'_1) = s(x'_2) = x$  and  $x'_1 \neq x'_2$ . Hence  $x \in \overline{G}_1 \cap \overline{G}_2$  for all  $G_1 \in x'_1$  and  $G_2 \in x'_2$ , showing that  $iii$  would also fail.

$$\sigma f(x') = \inf_{F \in x'} \sup_{x \in F} f(x),$$

where  $F$  ranges over the clopens of  $x'$ . As  $F \in x'$  if and only if  $s(x') \in F$ , and as the  $F$ 's form a basis of neighborhoods at  $s(x')$ , we see that  $\sigma f(x') = f^* \circ s(x') = (f_*^*)^* \circ s(x') = f_*^* \circ s(x') = f \circ s(x')$ . Hence  $\sigma f = f \circ s$ .

v  $\Rightarrow$  ii. Let  $x'_1$  and  $x'_2$  be two arbitrary distinct points of  $X'$ . Then there exists a function  $f' \in C(X')$  such that  $f'(x'_1) \neq f'(x'_2)$ . Let  $f = \sigma^{-1} f' \in N(X)$ . Then  $f \circ s(x'_1) = \sigma f(x'_1) = f'(x'_1) \neq f'(x'_2) = \sigma f(x'_2) = f \circ s(x'_2)$ . Hence  $s(x'_1) \neq s(x'_2)$ .

### Bibliography

- [1] R. P. DILWORTH, The normal completion of the lattice of continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 427—438 (1950).
- [2] H. HERMES, Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955, pp. 133—136.
- [3] I. KAPLANSKY, Lattices of continuous functions. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 617—623 (1947).
- [4] M. H. STONE, Boundedness properties in function-lattices. Canadian J. Math. **1**, 176—186 (1949).

Eingegangen am 22. 6. 1960

Anschrift der Autoren:

Teng-sun Liu  
Department of Mathematics  
University of Pennsylvania  
Philadelphia (Pa.), USA

Ju-kwei Wang  
Institute of Mathematics  
Academia Sinica  
Taipei (Formosa), China

## A Class of Functions Determined by Dense Sets

By

C. J. NEUGEBAUER<sup>1)</sup>

**Introduction.** Let  $I_0 = [0, 1]$  and let  $C$  be the class of all real-valued continuous functions on  $I_0$ . It is well-known that the functions on  $C$  are determined by dense sets in  $I_0$ . In this note we will show that  $C$  lies in a larger class  $F$  of functions which are determined by dense sets in  $I_0$ . Apart from  $C$ , the class  $F$  contains all approximately derivable functions on  $I_0$ . For the notion of approximate derivative the reader should consult [3]. The properties of approximate derivatives that will be used in this paper can be found in the papers [4], [5] with simpler proofs in [1].

**Determined by dense sets.** A class  $F$  of functions  $f: I_0 \rightarrow R$ ,  $R$  reals, is said to be *determined by dense sets in  $I_0$*  if and only if any two functions in  $F$  that agree on a dense subset of  $I_0$  are identical on  $I_0$ .

If  $F$  is determined by dense sets in  $I_0$ , it does not necessarily follow that the *uniform closure*  $\bar{F}$  of  $F$ , i.e., the closure of  $F$  in the sup-metric, is determined by dense sets.

**Example.** Let  $F$  be the class consisting of

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad \text{and} \quad f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}, \quad x \in I_0, n = 1, 2, \dots$$

It is readily checked that  $F$  is determined by dense sets in  $I_0$ . However,  $\bar{F}$  contains the function  $f \equiv 1$  on  $I_0$ , and hence  $\bar{F}$  is not determined by dense sets in  $I_0$ .

It will be useful to have a condition on  $F$  so that the property of "determined by dense sets" extends to  $\bar{F}$ .

**Definition 1.** A class  $F$  of functions  $f: R \rightarrow R$  will be termed of *type S* if and only if for every  $a > 0$  there is a function  $f \in F$  such that  $f(x) = 0$ ,  $|x| \leq a$ , and  $f(x) > 0$ ,  $|x| > a$ .

**Definition 2.** Let  $F_1, F_2$  be two classes of functions. By  $F_1 \circ F_2$  we understand the class of all functions that can be obtained as a composition  $f_1 \circ f_2$ ,  $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2$ .

**Theorem 1.** Let  $F$  be a class of functions determined by dense sets in  $I_0$ . Assume

- (1)  $f, g \in F$  implies  $f - g \in F$ ,
- (2) there exists a class  $F_0$  of type S such that  $F \supset F_0 \circ F$ .

Then  $\bar{F}$  is determined by dense sets in  $I_0$ .

---

<sup>1)</sup> Supported by the National Science Foundation Grant NSF-G 18920.



**Proof.** Assume that there are two functions  $f_1, f_2 \in \bar{F}$  such that  $f_1 = f_2$  on a dense subset  $D$  of  $I_0$ , but for some  $x_0 \in I_0$ ,  $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ . Let  $h = f_1 - f_2$ . We may suppose that  $0 < a < h(x_0)$ . There are functions  $g_1, g_2 \in F$  such that

$$|f_i(x) - g_i(x)| < \frac{a}{4}, \quad x \in I_0, \quad i = 1, 2.$$

If we let  $g = g_1 - g_2$ , we see that  $|h(x) - g(x)| < \frac{a}{2}$ ,  $x \in I_0$ . There is a function  $f \in F_0$  with  $f(x) = 0$ ,  $|x| \leq \frac{a}{2}$ , and  $f(x) > 0$ ,  $|x| > \frac{a}{2}$ . Then  $f \circ g(x) = 0$ ,  $x \in D$ , and  $f \circ g(x_0) > 0$ . By (1) and (2),  $f \circ g \in F$ , a contradiction.

**Remark.** The example given above shows that the condition (1) cannot be deleted in the above theorem. As  $F_0$  take the class of functions  $f$  of the form  $f(x) = 0$ ,  $|x| \leq a$ , and  $f(x) = |x|$ ,  $|x| > a$ ,  $a > 0$ . Then  $F \supset F_0 \circ F$ , where  $F$  is the class of functions of the example.

**Approximately derivable functions.** For  $f: I_0 \rightarrow R$  we denote by  $f'(x_0)$  the ordinary derivative of  $f$  at  $x_0$ , and by  $f'_{ap}(x_1)$  the approximate derivative at  $x_1$ .

**Theorem 2.** *Let  $f: I_0 \rightarrow R$  be approximately derivable on  $I_0$ , and let  $E = \{x: f'(x) \text{ exists}\}$ . If  $f'$  is bounded on  $E$ , then  $E = I_0$ .*

**Proof.** There is a positive number  $M$  such that  $|f'(x)| < M$ ,  $x \in E$ . Let  $\{Q\}$  be the collection of nondegenerate components of  $E$ . Let us assume that  $E \neq I_0$ . If an upper “0” denotes “interior relative to  $I_0$ ”, the set  $P = I_0 - \bigcup Q^0$  is nonempty and closed, where the union is extended over all  $Q \in \{Q\}$ .

For  $\alpha > M$ , consider the set  $A_\alpha = \{x: f'_{ap}(x) \geq \alpha\}$ . We will show that  $A_\alpha$  is a dense subset of  $P$ . Since  $\alpha > M$  and  $|f'_{ap}(x)| = |f'(x)| < M$ ,  $x \notin P$ , we see that  $A_\alpha \subset P$ . If we suppose that  $A_\alpha$  is not dense in  $P$ , we have a point  $x_0 \in P$  and an interval  $J \subset I_0$  such that  $x_0 \in J^0$  and  $J \cap A_\alpha = \emptyset$ . Let  $h(x) = f(x) - \alpha \cdot x$ ,  $x \in I_0$ . Then on  $J$ ,  $h'_{ap}(x) < 0$ , and by [1, Corollary 1],  $h'_{ap}(x) = h'(x)$ ,  $x \in J^0$ . Therefore,  $f'$  exists on  $J^0$  and  $J^0 \subset Q^0$  for some  $Q \in \{Q\}$ . Hence  $x_0 \notin P$ , a contradiction.

By [4], [1], the function  $f'_{ap}: I_0 \rightarrow R$  is of Baire class one, and since  $P$  is closed,  $f'_{ap}$  has a point of continuity in  $P$  relative to  $P$ . Let  $x_0$  be such a point in  $P$ . If  $\alpha > \max[M, |f'_{ap}(x_0)| + 1]$ , there is a  $\delta > 0$  such that  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A_\alpha = \emptyset$ , contradicting that  $A_\alpha$  is a dense subset of  $P$ . This completes the proof.

**Corollary.** *Let  $f, g: I_0 \rightarrow R$  be two approximately derivable functions on  $I_0$  which agree on a dense subset  $D$  of  $I_0$ . Then  $f \equiv g$  on  $I_0$ .*

**Proof.** Let  $h = f - g$ , and let  $E = \{x: h'(x) \text{ exists}\}$ . If  $x_0 \in E$ ,  $h$  is continuous at  $x_0$ , and since  $h = 0$  on  $D$ ,  $h(x_0) = 0$ . Therefore,  $h'(x_0) = 0$ . By the theorem,  $E = I_0$ , and  $h$  is continuous on  $I_0$ . Therefore,  $f \equiv g$  on  $I_0$ .

**Main results.** Let  $F_1$  be the class of all approximately derivable functions on  $I_0$ . We need the following lemma.

**Lemma.** *If  $h: R \rightarrow R$  is ordinarily derivable on  $R$ , then for each  $f \in F_1$ ,  $h \circ f \in F_1$ .*

PROOF. Let  $x_0 \in I_0$ . There is a measurable set  $E \subset I_0$  such that  $x_0 \in E$ , the density of  $E$  at  $x_0$  relative to  $I_0$  is "one", and for  $x \in E - x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_{\text{ap}}(x_0).$$

An elementary calculation shows that for  $x \in E - x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = h'[f(x_0)] \cdot f'_{\text{ap}}(x_0),$$

where  $g = h \circ f$ .

Remark. It is easy to give examples showing that, with the above notation,  $f \circ h$  need not be in  $F_1$ .

**Theorem 3.** Let  $F = \bar{F}_1$ . Then  $F$  contains  $C$  properly and  $F$  is determined by dense sets in  $I_0$ .

Proof.  $C$  is contained in  $F$ , since the ordinary derivable functions are dense in  $C$ . It is easy to give an example of a function in  $F_1$  but not in  $C^2$ . This shows that  $C$  is a proper subset of  $F$ .

We will verify that  $F_1$  satisfies the conditions of theorem 1. From the previous paragraph we know that  $F_1$  is determined by dense sets in  $I_0$ . Moreover, it is clear that  $f, g \in F_1$  implies  $f - g \in F_1$ . Let for each  $a > 0$ ,  $h_a: R \rightarrow R$  be an ordinarily derivable function on  $R$  such that  $h_a(x) = 0$ ,  $|x| \leq a$ , and  $h(x) > 0$ ,  $|x| > a$ , and let  $F_0$  be the class of all these functions. Then  $F_0$  is of type  $S$  and by the lemma,  $F_1 \supset F_0 \circ F_1$ . Application of theorem 1 completes the proof.

The next theorem provides some information as to the size of  $F$ .

**Theorem 4.**  $F$  is a proper subset of the class of all approximately continuous functions on  $I_0$ .

Proof. Each  $f \in F_1$  is approximately continuous on  $I_0$  and the uniform limit of a sequence of approximately continuous functions is easily seen to be approximately continuous. In order to exhibit an approximately continuous function on  $I_0$  which is not in  $F$ , we proceed as follows. Let  $Q$  be the rationals in  $I_0$  and let  $x_0 \in I_0 - Q$ . By [6, see also 2], there is an approximately continuous function  $f: I_0 \rightarrow R$  such that  $f(x) = 0$ ,  $x \in Q$ , and  $f(x_0) = 1$ . Clearly, since  $F$  is determined by dense sets,  $f \notin F$ .

Remark. It follows from the above theorem that the class of approximately derivable functions is not dense in the class of approximately continuous functions. This is an interesting property as compared with the class of ordinarily derivable functions and  $C$ .

---

<sup>2)</sup> Let  $\{I_n = [a_n, b_n]\}$  be a sequence of disjoint intervals in  $I_0$  such that 0 is a point of dispersion of  $\bigcup I_n$ . If  $f_n: I_0 \rightarrow R$  is a differentiable function such that  $f_n\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 1$  and  $f_n(x) = 0$ ,  $x \in I_0 - I_n$ , then the function  $f(x) = \sum f_n(x)$  is an approximately derivable on  $I_0$  but not continuous at 0.

**Bibliography**

- [1] C. GOFFMAN and C. J. NEUGEBAUER, On approximate derivatives. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 962—966 (1960).
- [2] C. GOFFMAN, C. J. NEUGEBAUER and T. NISHIURA, Density topology and approximate continuity. Duke Math. J. (to appear).
- [3] S. SAKS, Theory of the Integral. Warszawa-Lwow 1937.
- [4] G. TOLSTOFF, Sur la dérivée approximative exacte. Rec. Math. (Mat Sbornik), N.S. **4**, 409 bis 504 (1938).
- [5] G. TOLSTOFF, Sur quelques propriétés des fonctions approximativement continues. Rec. Math. (Mat. Sbornik), N.S. **5**, 637—645 (1939).
- [6] Z. ZAHORSKI, Sur la première dérivée. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 1—54 (1950).

Eingegangen am 1. 4. 1961

Anschrift des Autors:

C. J. Neugebauer  
Purdue University  
Lafayette (Ind.), USA



## Supermartingale und Choquet-Rand

Von

HEINZ BAUER

**Einleitung.** Der Begriff des Choquet-Randes eines kompakten Raumes  $X$  bezüglich einer Menge  $\mathcal{E}$  von nach unten halbstetigen, reellen Funktionen auf  $X$  hat sich in letzter Zeit in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik als nützlich erwiesen. Es sei hier nur hingewiesen auf die Beziehungen dieser Begriffsbildung zur Theorie der Extrempunkte konvexer Mengen (vgl. [1], [2], [4]), zum Dirichletschen Problem für elliptische und parabolische Differentialgleichungen ([2], [3]) und zur Theorie der Funktionenalgebren ([2], [4]). In all diesen Fällen wird von  $\mathcal{E}$  zusätzlich gefordert, daß  $\mathcal{E}$  die Punkte von  $X$  trennt, daß also zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  eine Funktion  $u \in \mathcal{E}$  existiert mit  $u(x) \neq u(y)$ .

Ein Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die Bedeutung dieser Begriffsbildung für die Theorie der Markoffschen Ketten aufzuzeigen. Um die Allgemeinheit nicht unnötig einzuschränken, erweist es sich als notwendig, die Forderung der Punktentrennung durch  $\mathcal{E}$  fallen zu lassen. Ferner muß die Kompaktheit von  $X$  zur lokalen Kompaktheit abgeschwächt werden. Der Definition und den Eigenschaften des Choquet-Randes unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen ist der Abschnitt 1 dieser Arbeit gewidmet.

Sodann wird eine homogene Markoffsche Kette mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Zuständen betrachtet.  $X$  sei der mit der diskreten Topologie ausgestattete Raum aller Zustände und  $\Pi$  die zugehörige stochastische Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten. Als Funktionenmenge  $\mathcal{E}$  wird die Menge aller Supermartingale der Kette gewählt; das sind alle nach unten beschränkten reellen Funktionen  $u$  auf  $X$ , welche der Ungleichung  $\Pi u \leq u$  genügen.

Zur Behandlung der uns hier interessierenden Fragen aus der Theorie der Markoffschen Ketten eignen sich besonders gut die von FELLER [9] in anderem Zusammenhang eingeführten Begriffe und Methoden. Diese werden in Abschnitt 2 kurz zusammengestellt und durch Zusätze ergänzt. In Abschnitt 3 wird dann gezeigt, daß der Choquet-Rand von  $X$  bezüglich der Menge  $\mathcal{E}$  der Supermartingale stets mit der Menge aller rekurrenten Zustände zusammenfällt. Alle übrigen Zustände sind transient.

Im Schlußteil 4 wird im Falle eines endlichen Zustandsraumes  $X$  untersucht, welche Paare von Zuständen durch ein Supermartingal getrennt werden können. Diese Frage kann mit Hilfe der vorher gewonnenen Resultate vollständig beantwortet werden. Insbesondere ergibt sich, daß  $\mathcal{E}$  genau dann die Zustände aus  $X$  trennt, wenn die betreffende Markoffsche Kette absorbierend ist. Hier liegt also ein gewisses Gegen-

stück zu den Ergebnissen von BLACKWELL [5] und BREIMAN [8] über atomistische Markoffsche Ketten vor.

Bei allen oben genannten Untersuchungen wird auch der Fall einer substochastischen Matrix  $\Pi$  in die Betrachtungen mit einbezogen.

## 1. Extremalpunkte und Choquet-Rand.

**1.1.** Wir führen zunächst die für das Folgende zentrale Begriffsbildung ein. Im Hinblick auf andere Anwendungen wählen wir die Voraussetzungen dabei wesentlich allgemeiner, als es für die folgenden Betrachtungen nötig wäre.

Es sei  $X$  ein *lokal-kompakter* (Hausdorffscher) Raum und  $\mathcal{E}$  eine (nicht leere) Menge *numerischer*<sup>1)</sup>, *nach unten beschränkter* und *nach unten halbstetiger* Funktionen auf  $X$ . Dann definiert  $\mathcal{E}$  in  $X$  eine Äquivalenzrelation: Zwei Punkte  $x, y \in X$  heißen  $\mathcal{E}$ -äquivalent, wenn für alle Funktionen  $u \in \mathcal{E}$  gilt  $u(x) = u(y)$ . Die zugehörige Äquivalenzklasse eines Punktes  $x \in X$  ist die Menge

$$(1) \quad K_x = \{y \in X : u(y) = u(x) \text{ für alle } u \in \mathcal{E}\}.$$

Im Sinne der Integrationstheorie von BOURBAKI [6] besitzt jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$  ein Oberintegral  $\int^* u d\mu$  bezüglich eines jeden positiven (Radonschen) Maßes  $\mu$  auf  $X$ . Wird  $\mu$  zusätzlich als beschränkt, also von endlicher Gesamtmasse  $\int d\mu$  vorausgesetzt, so ist  $-\infty < \int^* u d\mu \leq +\infty$ , da jedes  $u \in \mathcal{E}$  nach unten beschränkt ist. Die Endlichkeit von  $\int^* u d\mu$  ist dann gleichbedeutend mit der  $\mu$ -Integrierbarkeit von  $u$ , wobei außerdem  $\int^* u d\mu = \int u d\mu$  ist.

Für jedes  $x \in X$  bezeichne nun  $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$  die Menge aller Maße  $\mu \geq 0$  auf  $X$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(2) \quad \begin{aligned} \int^* u d\mu &\leq u(x) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{E}; \\ \int d\mu &= 1. \end{aligned}$$

Keine der Mengen  $\mathcal{M}_x$  ist leer, da offenbar stets das durch die Einheitsmasse im Punkte  $x$  definierte Maß  $\varepsilon_x$  zu  $\mathcal{M}_x$  gehört. Für  $\mathcal{E}$ -äquivalente Punkte  $x, y \in X$  ist  $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) = \mathcal{M}_y(\mathcal{E})$ .

Nunmehr definieren wir:

*Ein Punkt  $x \in X$  heiße  $\mathcal{E}$ -extremal, wenn jedes Maß  $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$  von der Menge  $K_x$  getragen<sup>2)</sup> wird.*

*Die Menge aller  $\mathcal{E}$ -extremalen Punkte von  $X$  heiße der Choquet-Rand von  $X$  bezüglich  $\mathcal{E}$  und werde mit  $X_e = X_e(\mathcal{E})$  bezeichnet.*

Die später folgenden Anwendungen werden diese Definition illustrieren. Zunächst sind ergänzende Bemerkungen nötig: Aus der Definition folgt, daß mit  $x$  auch jeder Punkt der Äquivalenzklasse  $K_x$   $\mathcal{E}$ -extremal ist. Daher ist der Choquet-Rand  $X_e$  stets die Vereinigung gewisser Mengen  $K_x$ ;  $X_e$  kann insbesondere die leere Menge sein.

<sup>1)</sup> *Reelle bzw. numerische Funktion  $f$  auf einer Menge  $A$  heiße jede Abbildung  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  bzw.  $f: A \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  von  $A$  in die Zahlengerade  $\mathbf{R}$  bzw. in die durch Adjunktion von  $\pm \infty$  kompaktifizierte Zahlengerade  $\bar{\mathbf{R}}$ .*

<sup>2)</sup> Vgl. BOURBAKI [7], p. 53. Nach der dort gegebenen Definition wird  $\mu$  von  $K_x$  getragen, wenn die Komplementärmenge  $\mathbf{C}K_x$   $\mu$ -lokal-vernachlässigbar ist.

Eine beliebige Menge  $K_x$  ist im allgemeinen nicht abgeschlossen. Es gilt jedoch:

**Satz 1.** Für jeden  $\mathcal{E}$ -extremalen Punkt  $x \in X$  ist  $K_x$  abgeschlossen.

Beweis. Der Punkt  $z \in X$  sei der Menge  $K_x$  adhären. Da jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$  nach unten halbstetig ist und auf  $K_x$  den konstanten Wert  $u(x)$  hat, gilt:

$$u(z) = \liminf_{y \rightarrow z} u(y) \leq \liminf_{y \rightarrow z, y \in K_x} u(y) = u(x).$$

Das heißt aber es ist  $\int^* u d\mu \leq u(x)$  für  $\mu = \varepsilon_z$  und alle  $u \in \mathcal{E}$ , also  $\varepsilon_z \in \mathcal{M}_x$ . Da  $x$   $\mathcal{E}$ -extremal ist, wird dann  $\varepsilon_z$  von  $K_x$  getragen; es ist somit  $z \in K_x$ . Daher ist  $K_x$  abgeschlossen.

Für jeden Punkt  $x \in X_e$  und den Träger  $T_\mu$  eines jeden Maßes  $\mu \in \mathcal{M}_x$  gilt also:  $T_\mu \subset K_x$ .

**1.2.** Für einen kompakten Raum  $X$  sichert das folgende maßtheoretische „Minimumprinzip“ die Existenz  $\mathcal{E}$ -extremaler Punkte.

**Satz 2.** Ist der Raum  $X$  kompakt, so besitzt jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$  mindestens eine  $\mathcal{E}$ -extremale Minimalstelle.

Anders formuliert: Zu  $u \in \mathcal{E}$  gibt es einen Punkt  $x \in X_e$  mit  $K_x \subset M_u$ , wenn hierbei  $M_u$  die Menge aller Minimalstellen von  $u$  bezeichnet.

Beweis. Für den Beweis verallgemeinern wir den Begriff des  $\mathcal{E}$ -extremalen Punktes und nennen eine Menge  $E \subset X$   $\mathcal{E}$ -extremal, wenn sie nicht leer und kompakt ist und wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: aus  $x \in E$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x$  folgt  $T_\mu \subset E$ . Man prüft leicht nach, daß das System  $\mathfrak{E}$  aller  $\mathcal{E}$ -extremalen Mengen bezüglich der Relation  $\supset$  induktiv geordnet ist. Wegen  $X \in \mathfrak{E}$  ist  $\mathfrak{E}$  nicht leer. Wir bestimmen nun die nach dem Zornschen Lemma existierenden minimalen Elemente von  $\mathfrak{E}$ . Dies sind nämlich gerade die Mengen  $K_{x_0}$  für  $\mathcal{E}$ -extremale Punkte  $x_0$ .

Nach Definition der  $\mathcal{E}$ -extremalen Punkte und Satz 1 ist zunächst jede derartige Menge  $K_{x_0}$  mit  $x_0 \in X_e$  ein Element von  $\mathfrak{E}$ . Es sei  $M \in \mathfrak{E}$  und  $M \subset K_{x_0}$ ; offenbar kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_0 \in M$  angenommen werden. Wegen  $\varepsilon_{x_0} \in \mathcal{M}_{x_0}$  ist dann  $\{x\} = T_{\varepsilon_{x_0}} \subset M$  für jedes  $x \in K_{x_0}$ . Also ist  $M = K_{x_0}$  und  $K_{x_0}$  minimales Element von  $\mathfrak{E}$ .

Umgekehrt ist jedes minimale Element  $M \in \mathfrak{E}$  von dieser Form. Es genügt hierfür zu zeigen, daß aus  $x_0 \in M$  folgt  $M \subset K_{x_0}$ . Dann ist nämlich  $x_0$   $\mathcal{E}$ -extremal, also nach dem bereits Bewiesenen  $K_{x_0}$  minimales Element von  $\mathfrak{E}$ , also  $M = K_{x_0}$ . Aus  $x_0 \in M$  folgt aber  $M \subset K_{x_0}$  genau dann, wenn jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$  auf  $M$  konstant ist. Es sei also  $u$  eine beliebige Funktion aus  $\mathcal{E}$ . Wir setzen  $\alpha = \inf u(M)$  und betrachten die Menge  $M' = \{x \in M : u(x) = \alpha\}$ . Da  $M$  kompakt und  $u$  nach unten halbstetig ist, so ist  $M'$  eine nicht leere, kompakte Teilmenge von  $M$ . Für jeden Punkt  $x \in M'$  und jedes Maß  $\mu \in \mathcal{M}_x$  gilt  $T_\mu \subset M$ , denn es ist  $x \in M$  und  $M \in \mathfrak{E}$ . Somit gilt  $u(x) \leq u(y)$  für alle  $y \in T_\mu$  sowie  $\int^* u d\mu \leq u(x)$ . Wegen  $\int d\mu = 1$  hat dies die Gleichheit  $u(x) = u(y)$  für alle  $y \in T_\mu$  und somit  $T_\mu \subset M'$  zur Folge (vgl. [1], Hilfssatz 3). Also ist  $M'$  selbst  $\mathcal{E}$ -extremal und somit wegen der Minimaleigenschaft von  $M$  gleich  $M$ . Das heißt aber es hat  $u$  auf  $M$  den konstanten Wert  $\alpha$ .



Für eine beliebige Funktion  $u \in \mathcal{E}$  ist nun die Menge  $M_u$  aller Minimalstellen nicht leer, kompakt und sogar  $\mathcal{E}$ -extremal. Aus  $x \in M_u$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x$  folgt nämlich  $\int^* u d\mu \leq u(x)$  und  $u(x) \leq u(y)$  für alle  $y \in T_\mu$ . Wegen  $\int d\mu = 1$  ergibt sich dann wie oben:  $T_\mu \subset M_u$ . Nach dem Zornschen Lemma existiert also zu  $M_u \in \mathfrak{U}$  ein minimales Element  $M \in \mathfrak{U}$  mit  $M \subset M_u$ . Auf Grund der bereits gewonnenen Kennzeichnung aller minimalen Elemente von  $\mathfrak{U}$  folgt hieraus die Behauptung.

**1.3.** Unter der Zusatzvoraussetzung, daß  $\mathcal{E}$  die Punkte von  $X$  trennt, daß also für jedes  $x \in X$  die Menge  $K_x$  einpunktig ist, findet sich der Satz 2 in [1]. In diesem Spezialfall ist ein Punkt  $x$  offenbar genau dann  $\mathcal{E}$ -extremal, wenn  $\mathcal{M}_x$  nur das Maß  $\varepsilon_x$  als Element enthält. Anwendungen dieses speziellen Satzes findet man in [1]–[3]. Insbesondere wird dort auch auf den engen Zusammenhang dieses Satzes mit dem Satz von KREIN-MILMAN hingewiesen.

Die dem obigen Beweis zugrunde liegende Idee ist die gleiche wie im Spezialfall der Punktentrennung. Daher wurden gewisse Schlüsse oben nur angedeutet; nähere Einzelheiten finden sich in [1].

Ähnlich wie in [1] kann auch Satz 2 aus einem allgemeineren Minimumprinzip gefolgert werden, welches in naheliegender Weise den Satz 1 aus [1] verallgemeinert. Hierauf soll jedoch hier nicht eingegangen werden.

Auf die Punktentrennung bei der Definition des Choquet-Randes haben übrigens bereits BISHOP-DE LEEUW [4] verzichtet; allerdings werden dort über  $\mathcal{E}$  speziellere Annahmen gemacht.

## 2. Absorptionsmengen bei Markoffschen Ketten.

**2.1.** Der bislang beliebige lokal-kompakte Raum  $X$  sei jetzt eine diskret topologisierte endliche oder abzählbar-unendliche Menge. Natürlich kann stets angenommen werden, daß  $X$  eine Teilmenge der Menge  $\mathbb{N}$  aller natürlichen Zahlen ist.

Gegeben sei weiter eine Matrix

$$(3) \quad \Pi = (p_{ij})_{(i,j) \in X \times X},$$

deren Elemente  $p_{ij}$  reelle Zahlen sind.  $\Pi$  werde als *substochastisch* vorausgesetzt; es gelte also:

$$(4) \quad p_{ij} \geq 0 \quad (i, j \in X);$$

$$(5) \quad \sum_{j \in X} p_{ij} \leq 1 \quad (i \in X).$$

Somit definiert  $\Pi$  eine Irrfahrt mit  $X$  als Zustandsraum und den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$ ;  $1 - \sum_{j \in X} p_{ij}$  kann als Wahrscheinlichkeit für das Abbrechen der Irrfahrt bei der Ausgangsposition  $i \in X$  gedeutet werden. Im Falle einer *stochastischen* Matrix  $\Pi$ , für welche also die Forderung (5) verschärft wird zu

$$(5') \quad \sum_{j \in X} p_{ij} = 1 \quad (i \in X),$$

liegt somit eine (homogene) Markoffsche Kette mit der Übergangsmatrix  $\Pi$  vor. In dem hier vorliegenden allgemeineren Fall wollen wir entsprechend von einer (homogenen) *Markoffschen Kette mit substochastischer Übergangsmatrix* sprechen.

Vermöge  $\Pi$  ist jedem Punkte (Zustand)  $i \in X$  das positive Maß

$$(6) \quad \pi_i = \sum_{j \in X} p_{ij} \varepsilon_j$$

auf  $X$  zugeordnet. Entsprechend definiert die Matrix  $\Pi^n = (p_{ij}^{(n)})$  der  $n$ -ten Übergangswahrscheinlichkeiten die positiven Maße

$$(6') \quad \pi_i^{(n)} = \sum p_{ij}^{(n)} \varepsilon_j \quad (i \in X)$$

für jedes  $n = 0, 1, \dots$ . Es ist  $\pi_i^{(0)} = \varepsilon_i$  und  $\pi_i^{(1)} = \pi_i$ ; aus (5) folgt  $\int d\pi_i^{(n)} \leq 1$  für alle  $i \in X$  und  $n = 0, 1, \dots$ .

Eine reelle Funktion  $u$  auf  $X$  heiße im folgenden<sup>3)</sup> ein *Supermartingal* (bezüglich  $\Pi$ ), wenn  $u$  nach unten beschränkt ist und wenn gilt:

$$(7) \quad \int u d\pi_i = \sum_{j \in X} u(j) p_{ij} \leq u(i) \quad \text{für alle } i \in X^4).$$

Bei Deutung von  $u$  als Spaltenvektor schreibt sich (7) in der Form:  $\Pi u \leq u$ . *Submartingal* heiße dual hierzu jede reelle Funktion  $u$  auf  $X$ , für welche  $-u$  ein Supermartingal ist. Eine Funktion  $u$  auf  $X$ , welche sowohl Super- als auch Submartingal ist, heiße ein *Martingal*.

Mit  $u$  und  $v$  ist offenbar auch jede der folgenden Funktionen ein Supermartingal:  $\alpha u + \beta v$  für reelle Zahlen  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  und  $\inf(u, v)$ . Wegen (5) sind alle konstanten nicht-negativen Funktionen auf  $X$  Supermartingale.

**2.2.** Nunmehr sollen die grundlegenden Begriffsbildungen und Resultate von FELLER [9] zusammengestellt werden; dabei werden weitgehend die dort verwendeten Bezeichnungen übernommen. Die wahrscheinlichkeits- und potentialtheoretische Deutung dieser Begriffe findet der Leser in [9].

Für jede nicht leere Teilmenge  $A$  von  $X$  bezeichne  $\Pi_A$  die Einschränkung von  $\Pi$  auf  $A \times A$ , also die Matrix

$$(8) \quad \Pi_A = (p_{ij})_{i,j \in A \times A},$$

welche wieder substochastisch ist. Folglich existiert

$$(9) \quad \delta^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_A^n \mathbf{1}^5).$$

Diese auf  $A$  definierte Funktion besitzt nach Konstruktion folgende Eigenschaften:

$$(10) \quad \Pi_A \delta^A = \delta^A; \quad 0 \leq \delta^A \leq \mathbf{1}.$$

Aus  $\delta^A$  wird durch folgende Fortsetzungsvorschrift eine Funktion  $\delta_A$  auf  $X$  gewonnen:

$$(11) \quad \delta_A(i) = \begin{cases} \delta^A(i), & i \in A; \\ 0, & i \in \mathbf{C}A. \end{cases}$$

<sup>3)</sup> In anderem Zusammenhang erweist es sich oft als zweckmäßig, die Beschränktheitsforderung bei Supermartingalen fallen zu lassen und auch  $+\infty$  als Funktionswert zuzulassen.

<sup>4)</sup> Da  $u$  eine reelle Funktion ist, folgt aus  $\int^* u d\pi_i \leq u(i)$  die  $\pi_i$ -Integrierbarkeit von  $u$  und  $\int u d\pi_i = \int^* u d\pi_i$  (vgl. Nr. 1.1).

<sup>5)</sup> Wie üblich unterscheiden wir in der Schreibweise nicht zwischen der reellen Zahl  $\alpha$  und der reellen Funktion (bzw. dem Spaltenvektor) mit dem konstanten Wert  $\alpha$ .

$\delta_A$  ist ein Submartingal bezüglich  $\Pi$  mit Werten:  $0 \leq \delta_A \leq 1$ . Daher existiert schließlich noch

$$(12) \quad s_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n \delta_A.$$

Die Funktion  $s_A$  ist ein Martingal bezüglich  $\Pi$  mit:

$$(13) \quad 0 \leq \delta_A \leq s_A \leq 1.$$

Nach FELLER [9] heißt eine Menge  $A \subset X$  *Absorptionsmenge*<sup>6)</sup> (bezüglich  $\Pi$ ), wenn  $\delta^A \neq 0$  oder, was dasselbe besagt,  $\delta_A \neq 0$  ist. Hiermit gleichwertig ist die Bedingung:  $s_A \neq 0$ .

Setzt man für eine beschränkte reelle Funktion  $f$  auf  $X$

$$\|f\| = \sup_{i \in X} |f(i)|,$$

so gilt nach [9] für jede Absorptionsmenge  $A$ :

$$(14) \quad \|\delta_A\| = \|s_A\| = 1.$$

2.2. Über Absorptionsmengen benötigen wir noch einige weitere Kenntnisse:

**Hilfssatz 1.** Für je zwei nicht leere Teilmengen  $A, B$  von  $X$  mit  $A \subset B$  gilt

$$(15) \quad \delta^A(i) \leq \delta^B(i) \quad \text{für alle } i \in A.$$

Beweis. Setzen wir

$$\Pi_A^n = (s_{ij}^{(n)})_{(i,j) \in A \times A} \quad \text{und} \quad \Pi_B^n = (t_{ij}^{(n)})_{(i,j) \in B \times B},$$

so genügt es wegen (9) zu zeigen, daß  $s_{ij}^{(n)} \leq t_{ij}^{(n)}$  gilt für alle  $n = 1, 2, \dots$  und alle  $i, j \in A$ . Dies aber beweist man mühelos durch vollständige Induktion.

Hieraus folgt sofort weiter:

**Korollar.** Ist  $A$  eine Absorptionsmenge, so ist auch jede Menge  $B$  mit  $A \subset B \subset X$  eine Absorptionsmenge.

Schließlich gilt folgende Verallgemeinerung eines Resultates von FELLER [9]:

**Hilfssatz 2.** Für jedes Submartingal  $v \geq 0$  und jede reelle Zahl  $\eta$  mit  $0 < \eta < \|v\|$  ist die Menge

$$(16) \quad \{i \in X : v(i) > \eta\}$$

eine Absorptionsmenge.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß nach der in 2.1 gegebenen Definition  $v$  beschränkt ist. Für den Fall, daß  $v$  sogar ein Martingal ist, findet sich der Hilfssatz als Lemma 7.2 bei FELLER [9]. Der dort geführte Beweis bleibt aber wörtlich in der hier vorliegenden allgemeineren Situation richtig.

**Korollar.** Die Matrix  $\Pi$  sei stochastisch. Dann ist für jedes Supermartingal  $u$  und jede reelle Zahl  $\alpha$  die Menge

<sup>6)</sup> Im Englischen „sojourn set“.



$$(17) \quad A = \{i \in X : u(i) < \alpha\}$$

entweder leer oder eine Absorptionsmenge.

Beweis. Mit  $u$  ist auch  $w = \inf(\alpha, u) - \alpha$  ein Supermartingal, da  $\Pi$  stochastisch ist und somit alle konstanten reellen Funktionen Martingale sind. Also ist  $v = -w$  ein Submartingal,  $v \geq 0$  und  $A = \{i \in X : v(i) > 0\}$ . Nun ist entweder  $v = 0$  und damit  $A = \emptyset$  oder  $\|v\| > 0$ . Ist daher  $\eta$  eine reelle Zahl mit  $0 < \eta < \|v\|$ , so gilt:  $B = \{i \in X : v(i) > \eta\} \subset A$ . Nach den Hilfssätzen 1 und 2 ist dann  $A$  eine Absorptionsmenge.

### 3. Kennzeichnung irreduzibel-rekurrenter Mengen.

**3.1.** Die Bedeutung von  $X$  und  $\Pi$  sei dieselbe wie im letzten Abschnitt. Der Zusammenhang mit den Betrachtungen des Abschnittes 1 wird nun dadurch hergestellt, daß die dortige Funktionenmenge  $\mathcal{E}$  fortan die Menge aller Supermartingale bezüglich  $\Pi$  sei. Die in Abschnitt 1 über  $\mathcal{E}$  gemachten Voraussetzungen sind erfüllt. Damit sind die Äquivalenzklassen  $K_i$  und die Mengen  $\mathcal{M}_i$  für alle  $i \in X$  sowie der Choquet-Rand  $X_e$  definiert. Statt von  $\mathcal{E}$ -extremalen Punkten oder Zuständen wollen wir jetzt nur noch kurz von *extremalen Zuständen* sprechen.

Wir verschärfen diese Begriffsbildung wie folgt:

Ein Zustand  $i \in X$  heiße *stochastisch-extremal*, wenn er extremal ist und für alle  $j \in K_i$  gilt  $\int d\pi_j = 1$ .

Für eine stochastische Matrix  $\Pi$  fallen also die beiden Begriffe „extremaler Zustand“ und „stochastisch-extremaler Zustand“ zusammen.

Nunmehr ergibt sich folgende Beziehung der stochastisch-extremalen Zustände zu den im letzten Paragraphen eingeführten Absorptionsmengen:

**Satz 3.** Für jeden Zustand  $i \in X$  sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a)  $i$  ist stochastisch-extremal.
- (b) Das Maß  $\pi_j$  wird für jeden Zustand  $j \in K_i$  von  $K_i$  getragen und hat die Gesamtmasse 1<sup>7)</sup>.
- (c)  $K_i$  ist eine Absorptionsmenge.

Beweis. (a)  $\Rightarrow$  (b): Es sei  $i$  stochastisch-extremal. Für jedes  $j \in K_i$  ist dann  $\pi_j$  ein Maß aus  $\mathcal{M}_i$ . Da  $i$  insbesondere extremal ist, wird  $\pi_j$  von  $K_i$  getragen.

(b)  $\Rightarrow$  (c): Nach (b) ist  $\Pi_{K_i}$  eine stochastische Matrix. Also ist  $\delta^{K_i} = 1$  und somit  $K_i$  eine Absorptionsmenge.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Es sei  $A = K_i$  eine Absorptionsmenge. Da  $\delta_A$  ein Submartingal ist, muß  $\delta_A$  auf  $A$  konstant sein; wegen (11) und (14) folgt hieraus  $\delta^A = 1$ . Somit ist  $\delta_A$  die charakteristische Funktion von  $A$  bezüglich  $X$  und man erhält für jedes Maß  $\mu \in \mathcal{M}_i$ :  $\mu(A) = \int \delta_A d\mu \geq \delta_A(i) = 1$ . Wegen  $\int d\mu = 1$  folgt hieraus, daß  $\mu$  von  $A$  getragen wird. Also ist  $i$  ein extremaler Zustand. Wegen  $\delta^A = 1$  ist schließlich die Matrix  $\Pi_A$  nach (10) stochastisch, also  $\int d\pi_j = 1$  für alle  $j \in A$ . Somit ist  $i$  stochastisch-extremal.

<sup>7)</sup> In anderer Formulierung besagt (b): Die Matrix  $\Pi_{K_i}$  ist stochastisch.

Weiter benötigen wir noch:

**Hilfssatz 3.** Für jede Menge  $A \subset X$  und jeden stochastisch-extremalen Zustand  $i \in X$  gilt

$$(18) \quad \delta_A(i) = s_A(i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } K_i \subset A; \\ 0, & \text{falls } K_i \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Allgemeiner ist  $\delta_A(i) = 0$  für jedes  $i \in X$  mit  $K_i \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset$ .

Beweis. Nach Satz 3 ist  $\Pi_{K_i}$  für jeden stochastisch-extremalen Zustand  $i$  stochastisch, also  $\delta^{K_i} = 1$  und somit  $\delta_{K_i}(i) = 1$ . Nach (13) und Hilfssatz 1 ist dann  $\delta_A(i) = s_A(i) = 1$ , falls  $K_i$  eine Teilmenge von  $A$  ist. Weiter gilt definitionsgemäß:  $\delta_A(i) = 0$  für alle  $i \in \mathbf{C}A$ . Da  $\delta_A$  als Submartingal auf jeder Menge  $K_i$  konstant ist, folgt hieraus:  $\delta_A(j) = 0$  für alle  $j \in K_i$  und alle  $i$  mit  $K_i \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset$ . Setzt man nun  $i$  wieder zusätzlich als stochastisch-extremal voraus, so wird jedes Maß  $\pi_i^{(n)}$  nach Satz 3 von  $K_i$  getragen. Also folgt bei Berücksichtigung von (12):

$$s_A(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta_A d\pi_i^{(n)} = 0.$$

**3.2.** Nach FELLER [9] heißt eine Menge  $R \subset X$  irreduzibel-rekurrent, wenn  $R$  eine Absorptionsmenge mit folgender Minimaleigenschaft ist:  $A = R$  ist die einzige Absorptionsmenge mit  $A \subset R$ . Jeder in einer irreduzibel-rekurrenten Menge gelegene Zustand heißt rekurrent. Jeder nicht rekurrente Zustand heißt transient.

**Satz 4.** Die einzigen irreduzibel-rekurrenten Mengen sind die Mengen  $K_i$ , für welche der Zustand  $i \in X$  stochastisch-extremal ist.

Beweis. Es sei  $i$  ein stochastisch-extremaler Zustand und  $R = K_i$ . Nach Satz 3 ist dann  $R$  eine Absorptionsmenge. Für jede echte Teilmenge  $A$  von  $R$  ist  $K_i \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset$ , also nach (18):  $\delta_A(j) = 0$  für alle  $j \in K_i = R$ , also für alle  $j \in A$ . Somit ist  $\delta^A = 0$ , also  $A$  keine Absorptionsmenge, also  $R$  irreduzibel-rekurrent.

Umgekehrt sei  $R$  eine beliebige irreduzibel-rekurrente Menge. Dann ist  $\delta^R = 1$  und somit nach (10)  $\Pi_R$  eine stochastische Matrix. In der Tat: nach (14) ist  $\|\delta_R\| = 1$ ; aus  $0 < \eta = \delta_R(i) = \delta^R(i) < 1$  für ein  $i \in R$  würde also nach Hilfssatz 2 folgen, daß die Menge aller  $j \in X$  mit  $\delta_R(j) > \eta$  eine in  $R$  echt enthaltene Absorptionsmenge ist, was der Minimaleigenschaft von  $R$  widerspricht. Zusammen mit  $\Pi_R$  ist aber auch diejenige Matrix  $\tilde{\Pi}$  stochastisch, welche aus  $\Pi$  dadurch entsteht, daß man alle Zeilen mit einem Index  $i \in R$  beibehält und die Elemente  $p_{ij}$  jeder Zeile mit einem Index  $i \notin R$  ersetzt durch  $p_{ij} = \delta_{ij}$  (= Kroneckersymbol).

Nunmehr zeigen wir, daß jedes Supermartingal  $u$  (bezüglich  $\Pi$ ) auf  $R$  konstant ist. Hierzu sei  $\alpha$  eine beliebige reelle Zahl und  $u_\alpha$  folgende Funktion auf  $X$ :

$$u_\alpha(i) = \begin{cases} u(i), & i \in R; \\ \alpha, & i \in \mathbf{C}R. \end{cases}$$

Da  $\Pi_R$  stochastisch ist, so ist offenbar  $u_\alpha$  ein Supermartingal bezüglich  $\tilde{\Pi}$ , also nach dem Korollar zu Hilfssatz 2 die Menge

$$S_\alpha = \{i \in X: u_\alpha(i) < \alpha\} = \{i \in R: u(i) < \alpha\}$$

entweder leer oder eine Absorptionsmenge bezüglich  $\tilde{H}$ ; letzteres hat wegen  $S_\alpha \subset R$  zur Folge, daß  $S_\alpha$  dann auch Absorptionsmenge bezüglich  $H$  ist. Wegen der Minimaleigenschaft von  $R$  gilt also entweder  $S_\alpha = \emptyset$  oder  $S_\alpha = R$  für jedes reelle  $\alpha$ . Also muß  $u$  auf  $R$  konstant sein. Wir erhalten somit:  $R \subset K_i$  für jedes  $i \in R$ . Das Submartingal  $\delta_R$  ist auf  $K_i$  konstant und, wie sich oben ergab, die charakteristische Funktion von  $R$  bezüglich  $X$ . Daher gilt sogar  $R = K_i$  für ein beliebig gewähltes  $i \in R$ . Da  $R$  eine Absorptionsmenge ist, muß  $i$  nach Satz 3 stochastisch-extremal sein. — Damit ist der Satz bewiesen.

Aus der Definition der rekurrenten Zustände ergibt sich nun sofort:

**Korollar.** Die stochastisch-extremalen Zustände fallen mit den rekurrenten Zuständen zusammen.

Ist insbesondere  $H$  eine stochastische Matrix, so ist die Menge der rekurrenten Zustände gerade der Choquet-Rand  $X_e$  von  $X$  bezüglich  $\mathcal{E}$ .

**3.3.** Für jeden Zustand  $i \in X$  führen wir nun neben  $K_i$  noch die folgende Menge der „von  $i$  aus erreichbaren Zustände“ ein:

$$(19) \quad Q_i = \{j \in X: p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{für mindestens ein } n = 0, 1, \dots\}.$$

**Hilfssatz 4.** Es sei  $i \in X$  ein beliebiger Zustand. Dann wird für jedes  $j \in Q_i$  das Maß  $\pi_j$  von  $Q_i$  getragen. Ferner gilt  $K_i \subset Q_i$ .

**Beweis.** Zu  $j \in Q_i$  existiert eine ganze Zahl  $n \geq 0$  mit  $p_{ij}^{(n)} > 0$ . Für jeden Zustand  $k \in \mathbf{C} Q_i$  ergibt sich dann:

$$0 = p_{ik}^{(n+1)} = \sum_{v \in X} p_{iv}^{(n)} p_{vk} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}$$

und somit  $p_{jk} = 0$ . Also wird  $\pi_j$  von  $Q_i$  getragen. Dann aber prüft man sofort nach, daß die charakteristische Funktion  $u$  von  $\mathbf{C} Q_i$  bezüglich  $X$  ein Supermartingal ist. Folglich ist  $u$  auf  $K_i$  konstant, und zwar gleich  $u(i) = 0$ . Hieraus ergibt sich abschließend:  $K_i \subset Q_i$ .

Nunmehr erhalten wir folgende neue Kennzeichnung der stochastisch-extremalen Zustände:

**Satz 5.** Ein Zustand  $i \in X$  ist genau dann stochastisch-extremal, wenn  $K_i = Q_i$  und  $\int d\pi_j = 1$  ist für alle  $j \in K_i$ <sup>8)</sup>.

**Beweis.** Es sei  $i$  stochastisch-extremal. Dann wird nach Satz 3 jedes der Maße  $\pi_j$  mit  $j \in K_i$  von  $K_i$  getragen, also auch jedes Maß  $\pi_j^{(n)}$  für  $n = 0, 1, \dots$ . Nach (19) gilt also  $Q_i \subset K_i$ , woraus nach Hilfssatz 4  $K_i = Q_i$  folgt. Ferner ist natürlich  $\int d\pi_j = 1$  für alle  $j \in K_i$ . — Ist umgekehrt  $K_i = Q_i$  und  $\int d\pi_j = 1$  für alle  $j \in K_i$ , so ist  $i$  nach Hilfssatz 4 und Satz 3 stochastisch-extremal.

**3.4.** Es sei noch bemerkt, daß obige Resultate eine Vereinfachung der Beweisführung an einigen Stellen von [9] gestatten. So folgt z. B. aus Satz 4 unmittelbar, daß die irreduzibel-rekurrenten Mengen paarweise disjunkt sind.

<sup>8)</sup> Dies kann auch mit Hilfe von Satz 4 aus einer Bemerkung im Beweis von Theorem 11.1 bei FELLER [9] gefolgert werden.



Weiter bemerken wir, daß die Resultate dieses Paragraphen gültig bleiben, wenn man in der Definition der extremalen und stochastisch-extremalen Zustände die Menge  $\mathcal{E}$  aller Supermartingale durch die Menge  $\mathcal{E}_0$  aller beschränkten Supermartingale ersetzt. Unter Heranziehung der Bemerkung, daß für jedes  $u \in \mathcal{E}$  und jede reelle Zahl  $\alpha \geq 0$  die Funktion  $\inf(u, \alpha)$  zu  $\mathcal{E}_0$  gehört, prüft man leicht nach, daß der Übergang von  $\mathcal{E}$  zu  $\mathcal{E}_0$  weder die Mengen  $K_i$  noch die Mengen  $\mathcal{M}_i$  verändert. Hieraus folgt dann aber die Behauptung. Die gleiche Überlegung zeigt ferner, daß statt  $\mathcal{E}$  oder  $\mathcal{E}_0$  auch die Menge aller nach unten beschränkten, numerischen Funktionen  $u$  auf  $X$  mit  $\int u d\pi_i = \sum u(j)p_{ij} \leq u(i)$  für alle  $i \in X$  hätte verwendet werden können.

#### 4. Trennung von Zuständen endlicher Markoffscher Ketten.

4.1. Nunmehr liege der spezielle Fall vor, daß der Zustandsraum  $X$  nur endlich viele Punkte enthält. Die Matrix  $\Pi$  sei wieder substochastisch.

Aus beweistechnischen Gründen, welche die Zurückführung einer Reihe von Aussagen auf den stochastischen Fall betreffen, adjungieren wir zu  $X$  einen weiteren „idealen“ Zustand  $\omega$  und erhalten so den neuen Zustandsraum  $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$ . Für jedes  $i \in X$  setzen wir  $\alpha_i = 1 - \int d\pi_i$ ;  $a$  bezeichne den Spaltenvektor mit den Komponenten  $\alpha_i$ . Unter Verwendung einer evidenten, abkürzenden Schreibweise erweitern wir  $\Pi$  zu einer stochastischen Matrix  $\hat{\Pi}$  auf  $\hat{X} \times \hat{X}$ :

$$(20) \quad \hat{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\hat{\mathcal{E}}$  sei die Menge aller Supermartingale bezüglich  $\hat{\Pi}$ ;  $\hat{K}_i$  sei die einem Zustand  $i \in \hat{X}$  entsprechende Menge aller zu  $i$   $\hat{\mathcal{E}}$ -äquivalenten Zustände aus  $\hat{X}$ .

Es gelten folgende leicht einzusehende, den Übergang von  $\Pi$  zu  $\hat{\Pi}$  betreffende Aussagen:

I. Eine Menge  $A \subset X$  ist genau dann eine Absorptionsmenge bezüglich  $\Pi$ , wenn sie eine Absorptionsmenge bezüglich  $\hat{\Pi}$  ist.

II. Eine Menge  $R \subset X$  ist genau dann irreduzibel-rekurrent bezüglich  $\Pi$ , wenn sie irreduzibel-rekurrent bezüglich  $\hat{\Pi}$  ist.

III. Jeder bezüglich  $\Pi$  rekurrente (transiente) Zustand  $i \in X$  ist bezüglich  $\hat{\Pi}$  rekurrent (transient) und umgekehrt.

Zum Beweis von III ist zu bemerken, daß eine bezüglich  $\hat{\Pi}$  irreduzibel-rekurrente Menge  $R$  mit  $i \in R$  in  $X$  enthalten ist. Sonst wäre nämlich die einpunktige Absorptionsmenge  $\{\omega\}$  in  $R$  enthalten, also  $R = \{\omega\}$ .

IV. Für jedes  $u \in \mathcal{E}$  liegt die folgende Fortsetzung  $\hat{u}$  in  $\hat{\mathcal{E}}$ :  $\hat{u}(i) = u(i)$  für  $i \in X$ ,  $\hat{u}(\omega) = 0$ . Insbesondere gehört die charakteristische Funktion von  $X$  bezüglich  $\hat{X}$  zu  $\hat{\mathcal{E}}$ .

V. Für jedes  $\hat{u} \in \hat{\mathcal{E}}$  mit  $\hat{u} \geq 0$  ist die Einschränkung auf  $X$  ein Element von  $\mathcal{E}$ .

VI.  $\hat{K}_i = K_i$  für jedes  $i \in X$ ;  $\hat{K}_\omega = \{\omega\}$ .

Zum Beweis von VI ist zu bemerken, daß zwei durch eine Funktion aus  $\hat{\mathcal{E}}$  trennbare

Zustände aus  $\hat{X}$  stets durch ein Supermartingal  $\hat{u} \geq 0$  aus  $\hat{\mathcal{E}}$  getrennt werden können, da  $\hat{\mathcal{E}}$  die konstanten Funktionen auf  $\hat{X}$  enthält<sup>9)</sup>.

**4.2.** Wir beweisen jetzt einige speziell auf den endlichen Fall zugeschnittene Sätze; sie beruhen wesentlich auf der Kompaktheit von  $X$  und  $\hat{X}$  bezüglich der diskreten Topologie.

**Satz 6.** *Die Menge  $X$  sei endlich. Eine Menge  $A \subset X$  ist genau dann eine Absorptionsmenge, wenn ein stochastisch-extremaler Zustand  $i$  existiert mit  $K_i \subset A$ .*

**Beweis**<sup>10)</sup>. Wegen der oben genannten Behauptungen I und VI sowie wegen Satz 3 kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Matrix  $\Pi$  als stochastisch vorausgesetzt werden. Ist dann  $A$  eine Absorptionsmenge, so ist  $u = -\delta_A$  ein Supermartingal mit  $u \leq 0$  und  $u \neq 0$ . Wegen (11) liegt somit jede Minimalstelle von  $u$  in  $A$ . Nach Satz 2 existiert dann ein (stochastisch-)extremaler Zustand  $i$  mit  $K_i \subset A$ . — Die Umkehrung folgt aus Satz 3 und dem Korollar zu Hilfssatz 1.

Hieraus und aus der in Abschnitt 3 bewiesenen Identität von stochastisch-extremalen und rekurrenten Zuständen, folgt sofort:

**Korollar.** *Es sei  $X$  eine endliche Menge. Dann enthält jede Absorptionsmenge einen rekurrenten Zustand.*

Bekanntlich liegen die Verhältnisse bei einem unendlichen Zustandsraum  $X$  ganz anders (vgl. [9]).

**4.3.** Nach Satz 4 ist für jeden rekurrenten (= stochastisch-extremalen) Zustand  $i$  die Menge  $K_i$  die einzige den Zustand  $i$  enthaltende irreduzibel-rekurrente Menge. Für transiente Zustände können wir zeigen:

**Satz 7.** *Ist der Zustandsraum  $X$  endlich, so gilt für jeden transienten Zustand  $i$ :  $K_i = \{i\}$ .*

**Beweis.** Wegen III und VI kann für den Beweis die Matrix  $\Pi$  als stochastisch vorausgesetzt werden. Nach Satz 4 und seinem Korollar enthält  $K_i$  nur transiente Zustände. Zu zeigen ist also, daß zu jedem transienten Zustand  $j \neq i$  ein Supermartingal  $u$  existiert mit  $u(i) \neq u(j)$ .

Hierfür genügt es, wie zunächst bewiesen werden soll, die Existenz endlich vieler Zustände  $k_1, \dots, k_n \in X$  nachzuweisen mit folgenden Eigenschaften:  $k_n$  ist rekurrent;  $p_{ik_1} > 0, p_{k_1 k_2} > 0, \dots, p_{k_{n-1} k_n} > 0$ . Für das zur Menge

$$A = K_{k_n} \cup \{i, k_1, \dots, k_n\}$$

gehörige Submartingal  $\delta_A$  gilt dann nämlich  $\delta_A(i) > 0$ . In der Tat: nach (10) und (11) ist

$$\delta_A(t) = \int \delta_A d\pi_t \quad \text{für alle } t \in A.$$

<sup>9)</sup> Alle diese Überlegungen bleiben auch für einen unendlichen Zustandsraum richtig, tragen aber kaum etwas zur Vereinfachung der Untersuchungen in den beiden vorhergehenden Paragraphen bei.

<sup>10)</sup> Wegen der Endlichkeit von  $X$  folgt der Satz natürlich auch mühelos aus dem Satz 4. Jedoch legen wir hier Wert auf Beweismethoden, die auch bei allgemeineren Situationen (beliebige kompakte Zustandsräume) zur Verfügung stehen.

Für  $t = k_{n-1}$  erhält man somit:  $\delta_A(k_{n-1}) \geq \delta_A(k_n) p_{k_{n-1}k_n} > 0$ , da  $p_{k_{n-1}k_n} > 0$  und nach (18)  $\delta_A(k_n) = 1$  ist. Für  $t = k_{n-2}$  erhält man:

$$\delta_A(k_{n-2}) \geq \delta_A(k_{n-1}) p_{k_{n-2}k_{n-1}} > 0.$$

Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich nach endlich vielen Schritten die behauptete Ungleichung:  $\delta_A(i) > 0$ . Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder können  $k_1, \dots, k_n$  zusätzlich noch so gewählt werden, daß der transiente Zustand  $j$  unter ihnen nicht vorkommt. Dann ist  $\delta_A(i) > 0$  und  $\delta_A(j) = 0$  wegen  $j \notin A$ ; also ist  $-\delta_A$  ein die Zustände  $i$  und  $j$  trennendes Supermartingal. Oder aber  $k_1, \dots, k_n$  können dieser Zusatzbedingung nicht unterworfen werden. Dann aber hat man offenbar nur die Rollen von  $i$  und  $j$  zu vertauschen, und man stößt wieder auf den soeben erfolgreich behandelten ersten Fall. Somit hat sich das Problem auf die Bestimmung von Zuständen  $k_1, \dots, k_n$  mit den genannten Eigenschaften reduziert.

Zu seiner Lösung sei  $Q_i$  die in (19) definierte Menge der von  $i$  aus erreichbaren Zustände. Da  $\Pi$  stochastisch ist, so ist  $Q_i$  nach Hilfssatz 4 eine Absorptionsmenge; also enthält  $Q_i$  nach Satz 6 mindestens einen rekurrenten Zustand  $r$ . Somit gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $p_{ir}^{(n)} > 0$ . Hieraus folgt die Existenz von Zuständen  $k_1, \dots, k_n = r$ , die das Verlangte leisten.

Auf Grund der Sätze 4 und 7 überblickt man nun für eine endliche Markoffsche Kette mit substochastischer Übergangsmatrix völlig die Äquivalenzklassen  $K_i$ . Es ist nicht gelungen, die entsprechende Frage für den Fall eines abzählbar unendlichen Zustandsraumes  $X$  zu beantworten.

**4.4.** Es sei wieder  $X$  endlich und  $\Pi$  substochastisch. Ein Zustand  $i \in X$  heiße *absorbierend*, wenn die einelementige Menge  $\{i\}$  eine Absorptionsmenge ist. Hierfür ist offenbar notwendig und hinreichend die Bedingung:  $\pi_i = \varepsilon_i$ . Die Markoffsche Kette mit der Übergangsmatrix  $\Pi$  heiße *absorbierend*, wenn zu jedem Zustand  $i \in X$  mindestens ein absorbierender Zustand  $j$  existiert mit  $j \in Q_i$ , d. h. mit  $p_{ij}^{(n)} > 0$  für ein  $n = 0, 1, \dots$  (Falls  $\Pi$  eine stochastische Matrix ist, stimmt diese Definition mit der üblichen Definition absorbierender Markoffscher Ketten überein. Vgl. hierzu [10].)

Wir behaupten folgendes Kriterium:

**Satz 8.** Eine endliche Markoffsche Kette mit substochastischer Übergangsmatrix  $\Pi$  ist genau dann absorbierend, wenn je zwei verschiedene Zustände aus  $X$  durch ein Supermartingal getrennt werden können und wenn ein überall positives Martingal  $s$  existiert.

**Beweis.** Zunächst werde  $\Pi$  als stochastisch vorausgesetzt. Dann ist  $s = 1$  ein überall positives Martingal. Angenommen, die Markoffsche Kette mit der Übergangsmatrix  $\Pi$  ist absorbierend. Dann muß gezeigt werden, daß alle Mengen  $K_i$  einpunktig sind. Wegen Satz 8 kann dabei  $i$  als rekurrent (= extremal) vorausgesetzt werden, was nach Satz 5  $K_i = Q_i$  bedeutet. Nach Annahme enthält  $Q_i$  einen absorbierenden Zustand  $j$ . Für diesen ist  $\{j\}$  eine in  $K_i$  enthaltene Absorptionsmenge. Nach Satz 4 muß also  $K_i = \{j\} = \{i\}$  sein. — Umgekehrt trenne  $\mathcal{C}$  die Punkte von  $X$ . Dann ist  $K_i = \{i\}$  für alle  $i$ , also nach Satz 3  $\pi_i = \varepsilon_i$  für alle extremalen Zustände  $i$ . Somit ist jeder extreme Zustand absorbierend. Nach Hilfssatz 4 und Satz 6 gibt es zu jedem



$i \in X$  einen extremalen, also absorbierenden Zustand  $j \in Q_t$ . Die Markoffsche Kette ist also absorbierend.

Nunmehr erst wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu. Angenommen, die Markoffsche Kette mit der substochastischen Übergangsmatrix  $\Pi$  ist absorbierend. Dann ist das in (12) definierte Martingal  $s = s_X$  überall positiv. Zunächst gilt nämlich nach (10),  $s = \delta^X \geq 0$  und somit  $s(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\pi_i^{(n)}$  für alle  $i \in X$ . Also ist  $s(j) = 1$  für jeden absorbierenden Zustand  $j$ . Zu einem beliebigen  $i \in X$  gibt es einen absorbierenden Zustand  $j$  mit  $p_{ij}^{(n)} > 0$  für ein  $n = 0, 1, \dots$ . Daher ist  $s(i) = \int s d\pi_i^{(n)} \geq s(j)p_{ij}^{(n)} > 0$ , also  $s$  überall positiv. Mittels  $s$  definieren wir eine stochastische Matrix

$$\Pi' = (p'_{ij})_{(i,j) \in X \times X}$$

wie folgt:  $p'_{ij} = \frac{s(j)}{s(i)} p_{ij}$  für alle  $i, j \in X$ <sup>11)</sup>. Also ordnet  $\Pi'$  dem Zustand  $i \in X$  das Maß  $\pi'_i = \frac{1}{s(i)} (s\pi_i)$  zu. Daß  $\Pi'$  stochastisch ist, folgt aus  $s(i) = \int s d\pi_i$ . Die absorbierenden Zustände sind offenbar für  $\Pi$  und  $\Pi'$  dieselben. Aus  $\pi'_i^{(n)} = \frac{1}{s(i)} (s\pi_i^{(n)})$  folgt, daß mit der durch  $\Pi$  definierten Markoffschen Kette auch die durch  $\Pi'$  definierte Kette absorbierend ist (und umgekehrt). Also definiert  $\Pi'$  eine absorbierende Markoffsche Kette; nach dem bereits behandelten stochastischen Fall trennt dann die Menge  $\mathcal{E}'$  aller Supermartingale bezüglich  $\Pi'$  die Zustände aus  $X$ . Nun rechnet man sofort nach, daß  $\mathcal{E}' = \left\{ \frac{u}{s} : u \in \mathcal{E} \right\}$  ist. Folglich trennt auch  $\mathcal{E}$  die Zustände aus  $X$ ; man hat hierbei nur zu beachten, daß  $s \in \mathcal{E}$  ist.

Umgekehrt existiere ein überall positives Martingal  $s$  und  $\mathcal{E}$  trenne die Zustände aus  $X$ . Dann definiert man wie soeben mittels  $s$  die stochastische Matrix  $\Pi'$  und bemerkt, daß mit der durch  $\Pi$  definierten Markoffschen Kette auch die durch  $\Pi'$  definierte Kette absorbierend ist. Somit muß nur noch gezeigt werden, daß die Menge  $\mathcal{E}' = \left\{ \frac{u}{s} : u \in \mathcal{E} \right\}$  aller Supermartingale bezüglich  $\Pi'$  die Zustände aus  $X$  trennt. Dies ergibt sich wie folgt. Es seien  $i \neq j$  Zustände aus  $X$ ; nach Voraussetzung gibt es ein  $u \in \mathcal{E}$  mit  $u(i) \neq u(j)$ . Also trennt  $u/s \in \mathcal{E}'$  die beiden Zustände, sofern  $s(i) = s(j)$  ist. Ist aber  $s(i) \neq s(j)$ , so werden  $i$  und  $j$  durch die Funktion  $1/s$  getrennt. Diese ist wegen  $1 \in \mathcal{E}$  ein Supermartingal bezüglich  $\Pi'$ . — Damit ist der Satz bewiesen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß es absorbierende Markoffsche Ketten mit stochastischer Übergangsmatrix  $\Pi$  gibt, für welche die konstanten Funktionen auf  $X$  die einzigen Martingale sind. Ein Beispiel hierfür wird geliefert durch die Matrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Satz 8 kann also nicht dahingehend verschärft werden, daß in ihm nur von Martingalen die Rede ist.

<sup>11)</sup> Vergleiche auch [9], p. 44.



## Literaturverzeichnis

- [1] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte. II. Arch. Math. **11**, 200—205 (1960).
- [2] H. BAUER, Silovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier **11**, 89—136 (1961).
- [3] H. BAUER, Une axiomatique du problème de Dirichlet pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques. C. r. Acad. Sci. Paris **250**, 2672—2674 (1960).
- [4] E. BISHOP and K. DE LEEUW, The representations of linear functionals by measures on sets of extreme points. Ann. Inst. Fourier **9**, 305—331 (1959).
- [5] O. BLACKWELL, On transient Markov processes with a countable number of states and stationary transition probabilities. Ann. Math. Stat. **26**, 654—658 (1955).
- [6] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. I—IV. Actual. Sci. et Industr. **1175**, Paris 1952.
- [7] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. V. Actual. Sci. et Industr. **1244**, Paris 1956.
- [8] L. BREIMAN, Transient atomic Markov chains with a denumerable number of states. Ann. Math. Stat. **29**, 212—218 (1958).
- [9] W. FELLER, Boundaries induced by non-negativ matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 19—54 (1956).
- [10] J. G. KEMENY and J. L. SNELL, Semimartingales of Markov chains. Ann. Math. Stat. **29**, 143—154 (1958).

Eingegangen am 8. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Heinz Bauer

Institut für Versicherungsmathematik

und Mathematische Statistik der Universität Hamburg

Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67—69

## Eine Bemerkung zur diskreten gemischten Erweiterung eines unendlichen Spieles

Von

DIETER BIERLEIN

Zwischen der Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre und der Theorie der Spiele mit unendlich vielen reinen Strategien besteht eine Querverbindung, die für die Konzeption der gemischten Erweiterung eines Spieles neue Gesichtspunkte ergibt und ein leicht zu handhabendes Kriterium dafür bietet, daß die Defintheit einer beliebigen gemischten Erweiterung die Defintheit der *diskreten* gemischten Erweiterung zur Folge hat. In Verschärfung eines Ergebnisses von BANACH und KURATOWSKI ([1]) hat ULAM ([2]) gezeigt, daß — unter einer sehr schwachen mengentheoretischen Einschränkung — auf der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  einer Menge  $M$  keine  $\sigma$ -additive, nicht identisch verschwindende reelle Mengenfunktion  $f|_{\mathfrak{P}(M)}$  existiert, die für abzählbare Mengen verschwindet. Daraus folgt unmittelbar, daß kein auf  $\mathfrak{P}(M)$  definiertes normiertes Maß<sup>1)</sup> existiert außer den rein diskreten Maßen, wie man sofort einsieht an Hand der Aufspaltung eines beliebigen Maßes in einen rein diskreten Anteil und in einen Anteil, der für abzählbare Mengen verschwindet. Mit anderen Worten:

(\*) Das System  $\{p|_{\mathfrak{P}(M)} : p(M) = 1\}$  aller auf  $\mathfrak{P}(M)$  definierten normierten Maße besteht genau aus den Maßen, die die Masse 1 auf eine abzählbare Teilmenge von  $M$  konzentrieren.

Die erwähnte mengentheoretische Einschränkung besteht in folgender Bedingung:

(\*\*) Es gibt keine unerreichbare Kardinalzahl  $\aleph_\xi$  mit  $\aleph_0 < \aleph_\xi \leq \aleph(M)$ .

Dabei heißt eine Kardinalzahl  $\aleph_\xi > \aleph_0$  unerreichbar, falls

1.  $\xi$  eine Grenzzahl ist,
2.  $\sum_{i \in J} k_i < \aleph_\xi$ , falls  $\aleph(J) < \aleph_\xi$  und  $k_i < \aleph_\xi$  für jedes  $i \in J$ .

Die Existenz einer solchen (Kuratowskischen) unerreichbaren Kardinalzahl  $> \aleph_0$  gilt im Rahmen der üblichen mengentheoretischen Axiomensysteme allgemein als ungewiß<sup>2)</sup>; nachgewiesen ist, daß ihre Nichtexistenz mit dem System von ZERMELO und FRAENKEL verträglich ist. Wenn überhaupt, dann wird (\*\*) höchstens bei einer nach HAUSDORFF „exorbitant großen“ Menge  $M$  verletzt. Besitzt  $M$  die Mächtigkeit des

---

<sup>1)</sup> Unter einem normierten Maß (oder:  $W$ -Maß) wird hier eine nichtnegative,  $\sigma$ -additive, auf einem  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{A}$  von Teilmengen einer Menge  $M$  definierte Mengenfunktion  $p|_{\mathfrak{A}}$  mit  $p(M) = 1$  verstanden.

<sup>2)</sup> Vergleiche [3], S. 184f.

Kontinuums, so bedeutet (\*\*) eine wesentliche Abschwächung der Kontinuums-hypothese.

Die Aussage (\*) läßt verschiedene Probleme der Theorie der unendlichen Spiele aus einer bisher unbeachteten Perspektive sehen. Als Beispiel seien herausgegriffen:

a) Für den Fall eines Spieles über Funktionenräumen wird in [4], S. 356f. die Möglichkeit diskutiert, als Definitionsbereich der gemischten Strategien das System aller Teilmengen des Funktionenraumes zu wählen. Die dabei ausgesprochene Befürchtung, hierdurch „intuitiv nicht akzeptable“ Resultate zu erhalten, wird durch (\*) insofern zerstreut, daß es sich dann nur um die diskrete gemischte Erweiterung handelt, gegen die sicherlich keine „intuitiven“ Bedenken bestehen, die vielmehr im allgemeinen sogar noch zu eng ist, um die Definitheit des Spieles zu erzielen.

b) Ist das System  $A$  der reinen Strategien eines Spielers  $S_1$  separabel bez. der in [5], S. 34, definierten Metrik  $\delta$ , so hängen Definitheit und Spielwert nicht davon ab, welcher  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{A}$  als Definitionsbereich für die gemischten Strategien des Spielers  $S_1$  gewählt wird, vorausgesetzt, daß  $\mathfrak{A}$  alle abzählbaren Teilmengen von  $A$  enthält. In [5], S. 41f., wird in diesem Zusammenhang für  $\mathfrak{A}$  der  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{A}_1$  der Borelschen Teilmengen des metrischen Raumes  $(A, \delta)$  angesetzt, und zwar unter Hinweis darauf, daß dann die Auszahlungsfunktion meßbar ist, falls auch für den Spieler  $S_2$  analog  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$  gewählt wird. Die Wahl dieser  $\sigma$ -Körper bedeutet aber, daß für den Spieler  $S_1$  unnötig viele  $W$ -Maße als gemischte Strategien zugelassen werden. Mit (\*) läßt sich die Beschränkung auf die diskreten Strategien bei gleichzeitiger Wahrung der Meßbarkeit der Auszahlungsfunktion formal zwanglos durch den Ansatz  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(A)$  erreichen.

c) Erzeugt die Metrik  $\delta$  auf  $A$  und  $B$  diskrete Topologien, so folgt  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{P}(A)$  und  $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{P}(B)$ . In diesem Fall stellt die gemischte Erweiterung mit den auf  $\mathfrak{A}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}_1$  definierten  $W$ -Maßen nach (\*) keine Alternative zur diskreten gemischten Erweiterung dar; vgl. dazu [5], S. 48. Für eine über die diskrete hinausgehende gemischte Erweiterung erscheint es hier und in ähnlichen Fällen als angebracht, die als gemischte Strategien zugelassenen  $W$ -Maße nicht allein durch die als Definitionsbereiche gewählten  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zu charakterisieren; denn wegen der Bedingung, daß die Auszahlungsfunktion  ${}^B(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$ -meßbar sein soll, wären  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwangsläufig sehr groß zu wählen. Einen Ausweg bietet vielleicht der Versuch,  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zunächst kleiner (d. h. „größer“) anzusetzen und dann durch zusätzliche Bedingungen unter den auf  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  definierten  $W$ -Maßen  $p$  bzw.  $q$  solche als gemischte Strategien auszusondern, für die das Produktmaß  $p \times q$  sich — ähnlich wie ein diskretes Maß — auf einen derartigen, größeren Definitionsbereich fortsetzen läßt, daß die Auszahlungsfunktion meßbar wird<sup>3)</sup>.

d) Als beweistechnisches Hilfsmittel bietet sich (\*) insbesondere für den Nachweis der Definitheit der diskreten gemischten Erweiterung an. Um die Definitheit einer

<sup>3)</sup> Auf diese Möglichkeit, insbesondere auf die Fortsetzung von Maßen im allgemeinen, soll in späteren Arbeiten näher eingegangen werden. Unter den zusätzlichen Bedingungen könnten z. B. auch die Voraussetzungen der Sätze in [5], 2.1.5 berücksichtigt werden.

gemischten Erweiterung zu zeigen, benötigt man nämlich von den Eigenschaften der zugrunde gelegten  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  vor allem die Bedingung, daß  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  nicht zu klein sind. Dagegen bestehen für  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  (oder zumindest für  $\mathfrak{A}$  oder  $\mathfrak{B}$ ) häufig keine Beschränkung nach oben<sup>4</sup>). Der Beweis gilt in solchen Fällen also unverändert auch für  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(A)$  und (oder)  $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(B)$ , woraus nach (\*) unmittelbar folgt, daß die diskrete gemischte Erweiterung ebenfalls definit ist, und zwar mit demselben Spielwert wie die allgemeineren gemischten Erweiterungen (bzw. daß der eine Spieler sich ohne Nachteil auf diskrete gemischte Strategien beschränken kann). Allerdings bedeutet (\*) ein zwar bequem anwendbares, aber doch recht „schweres Geschütz“, das in vielen dieser Fälle durch die bisher übliche epsilon-tische und elementar-topologische Beweistechnik ersetzt werden kann. In solchen Fällen bleibt jedoch (\*) ein nützliches Hilfsmittel, um sich in der allgemeinen Situation zu orientieren; die Einschränkung (\*\*) ist hierbei bedeutungslos.

#### Literaturverzeichnis

- [1] S. BANACH et C. KURATOWSKI, Sur une généralisation du problème de la mesure. *Fundamenta Math.* **14**, 127—131 (1929).
- [2] S. M. ULAM, Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. *Fundamenta Math.* **16**, 140—150 (1930).
- [3] H. BACHMANN, Theorie der transfiniten Zahlen. *Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete*, Berlin 1955.
- [4] J. C. C. MCKINSEY, *Introduction to the Theory of Games*. New York 1952.
- [5] A. WALD, *Statistical Decision Functions*. New York 1949.

Eingegangen am 22. 4. 1961

Anschrift des Autors:

Dieter Bierlein

Mathematisches Institut der Universität

München, Geschwister-Scholl-Platz 2

---

<sup>4</sup>) Die Einschränkungen für  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  ergeben sich vor allem aus Meßbarkeitsbedingungen; vgl. z. B. [5], Sätze 2.2 und 2.23.



## Verbandstheoretische Verallgemeinerung der Poincaréschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Von

WALTHER EBERL

**1. Einleitung.** Ist  $(M, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Maßraum mit einer reellen oder komplexen, jedoch endlichen Maßfunktion  $\mu$ , so gilt bekanntlich für  $A_i \in \mathfrak{B}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$(1) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{J \neq \emptyset} (-1)^{|J|-1} \mu\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right),$$

wobei  $J$  alle von der Nullmenge  $\emptyset$  verschiedenen Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  durchläuft und  $|J|$  die Anzahl der Elemente von  $J$  ist. Im Falle eines Wahrscheinlichkeitsmaßes stellt (1) die *Poincarésche Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung* dar.

(1) wird gewöhnlich bewiesen, indem man nach dem Muster

$$A_1 \cup A_2 = (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)$$

$\bigcup_{i=1}^n A_i$  mit Hilfe der Komplemente  $A_i^c = M - A_i$  in elementfremde Teilmengen zerlegt.

(1) gilt jedoch samt seinem dualen Gegenstück auch für Funktionen, die in nicht notwendig komplementären Verbänden definiert sind und deren Funktionswerte in einem Modul liegen.

Die im folgenden als bekannt vorausgesetzten Begriffe und Sätze der Verbandstheorie findet man in [4].

**2. Verallgemeinerungen.** Die Funktion  $\varphi$  heißt im folgenden *additiv*, wenn ihr Definitionsbereich ein distributiver Verband  $V$  mit Nullelement ist, wenn ihr Wertevorrat in einem Modul liegt, und wenn für jedes Paar  $(a, b)$  fremder Elemente aus  $V$   $\varphi(a \cup b) = \varphi(a) + \varphi(b)$  gilt.

**Satz 1.** Ist  $\varphi$  eine auf  $V$  definierte additive Funktion, ist  $a_i \in V$ ,  $b_i \in V$  und  $a_i \cap b_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), so gilt

$$(2) \quad \varphi\left(\bigcap_{i=1}^n b_i\right) = \sum_J (-1)^{|J|} \varphi(c_J),$$

wo

$$c_J = \bigcap_{i \notin J} (a_i \cup b_i) \cap \bigcap_{i \in J} a_i$$

gesetzt ist.

Beweis. Aus dem Distributivgesetz folgt

$$c_J = \bigcup_{K \supseteq J} d_K \quad \text{mit} \quad d_K = \bigcap_{i \in K} a_i \cap \bigcap_{i \notin K} b_i.$$

Wegen  $d_K \cap d_L = 0$  für  $K \neq L$  gilt  $\varphi(c_J) = \sum_{K \supseteq J} \varphi(d_K)$  und daher

$$\begin{aligned} \sum_J (-1)^{|J|} \varphi(c_J) &= \sum_J (-1)^{|J|} \sum_{K \supseteq J} \varphi(d_K) = \sum_K \varphi(d_K) \sum_{J \subseteq K} (-1)^{|J|} = \\ &= \sum_K \varphi(d_K) (1 - 1)^{|K|} = \varphi(d_\emptyset), \end{aligned}$$

womit wegen  $d_\emptyset = \bigcap_{i=1}^n b_i$  alles bewiesen ist.

Im Falle eines Maßraumes  $(M, \mathfrak{B}, \mu)$  mit endlicher reeller oder komplexer Maßfunktion gewinnt man durch Einsetzen von  $a_i = A_i \in \mathfrak{B}$  und  $b_i = A_i^c \in \mathfrak{B}$  aus (2) mit Hilfe der Formeln von de Morgan sofort (1).

Sei ferner  $R_n$  der Raum aller reeller  $n$ -tupel  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mu$  eine auf dem Verband der Borelmengen des  $R_n$  definierte Radonsche Maßfunktion und die Funktion  $F$  mit den Funktionswerten  $F(x) = \mu(\{t: t_1 \leq x_1, \dots, t_n \leq x_n\})$  die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann läßt sich das Maß  $\mu(C)$  einer Zelle  $C = \{x: y_1 < x_1 \leq z_1, \dots, y_n < x_n \leq z_n\}$  mit Hilfe von (2) durch Werte der Verteilungsfunktion ausdrücken.  $A_i = \{x: x_i \leq y_i\}$  und  $B_i = \{x: y_i < x_i \leq z_i\}$  sind für jedes  $i$  elementfremde Mengen aus  $\mathfrak{B}$ . Satz 1 führt daher durch  $a_i = A_i$  und  $b_i = B_i$  auf

**Korollar 1a.** Ist  $F$  die Verteilungsfunktion eines endlichen Radonschen Maßes  $\mu$  im reellen  $R_n$ , so ist das Maß einer Zelle  $C = \{x: y_1 < x_1 \leq z_1, \dots, y_n < x_n \leq z_n\}$

$$(3) \quad \mu(C) = \sum_J (-1)^{|J|} F_J,$$

wobei  $F_J$  aus  $F(z_1, \dots, z_n)$  hervorgeht, indem man die zu Zeigern aus  $J$  gehörigen  $z_i$  durch die entsprechenden  $y_i$  ersetzt.

Durch diese Herleitung wird der nahe Zusammenhang von (1) und (3) deutlich.

Der nächste Satz enthält die angekündigte Erweiterung der Poincaréschen Formel und eine Dualisierung derselben.

Eine auf einem Verband  $V$  definierte Funktion  $\varphi$  mit Werten aus einem Modul  $M$  heißt modular, wenn für beliebige  $a \in V$ ,  $b \in V$

$$(4) \quad \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a \cup b) + \varphi(a \cap b)$$

gilt.

**Satz 2.** Ist  $\varphi$  eine auf dem distributiven Verband  $V$  definierte modulare Funktion, deren Werte im Modul  $M$  liegen, sind  $a_1, \dots, a_n$  beliebige Elemente aus  $V$ , so ist

$$(5a) \quad \varphi\left(\bigcup_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{J \neq \emptyset} (-1)^{|J|-1} \varphi\left(\bigcap_{i \in J} a_i\right)$$

und

$$(5b) \quad \varphi\left(\bigcap_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{J \neq \emptyset} (-1)^{|J|-1} \varphi\left(\bigcup_{i \in J} a_i\right).$$

Beweis. Die Richtigkeit von (5a) folgt aus (4) durch vollständige Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  ist (5a) trivial, für  $n = 2$  folgt es unmittelbar aus (4). Angenommen (5a) sei bereits bis einschließlich  $n - 1$  bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi\left(\bigcup_{i=1}^n a_i\right) &= \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i \cup a_n\right) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i\right) + \varphi(a_n) - \varphi\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cap a_n\right) = \\ &= \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i\right) + \varphi(a_n) - \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (a_i \cap a_n)\right).\end{aligned}$$

Da hier für den ersten und dritten Summanden (5a) bereits gilt, erhält man sofort die rechte Seite von (5a) für  $n$ .

Da der Begriff der modularen Funktion selbstdual ist, ergibt sich (5b) durch Dualisierung von (5a).

Zwei Sonderfälle aus sehr verschiedenen Gebieten sollen die Anwendungsbreite von Satz 2 zeigen:

a)  $\mathfrak{P}(M)$  sei der Verband aller Teilmengen der Menge  $M$ . Jeder Menge  $A \subset M$  oder  $A \in \mathfrak{P}(M)$  entspreche als Funktionswert ihre Kennfunktion  $\kappa_A: \varphi(A) = \kappa_A$ . Alle Kennfunktionen sind dann Elemente des Moduls aller auf  $M$  definierten ganzzahligen Funktionen mit der punktweisen Addition als Verknüpfung. Für zwei beliebige Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $M$  gilt  $\kappa_A + \kappa_B = \kappa_{A \cup B} + \kappa_{A \cap B}$ , so daß  $\varphi$  modular ist. Also gilt

**Korollar 2a.** Für die Kennfunktionen der Vereinigung und des Durchschnitts von  $n$  beliebigen Teilmengen einer Menge  $M$  gilt:

$$(6a) \quad \kappa_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_J (-1)^{|J|} \kappa_{\bigcap_{i \in J} A_i}$$

und

$$(6b) \quad \kappa_{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \sum_J (-1)^{|J|} \kappa_{\bigcup_{i \in J} A_i}.$$

b) Die Menge der natürlichen Zahlen bildet bekanntlich einen distributiven, aber nicht komplementären Verband, wenn man als Vereinigung zweier Zahlen  $a, b$  ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches  $V\{a, b\}$  und als Durchschnitt ihren größten gemeinsamen Teiler  $T\{a, b\}$  definiert. Nullelement ist die Zahl 1, doch gibt es weder ein Einselement noch Komplemente. Setzt man  $\varphi(a) = a$ , so liegen alle Funktionswerte in der multiplikativen Gruppe der positiven rationalen Zahlen. Die Verknüpfung der Funktionswerte ist also die gewöhnliche Multiplikation und  $\varphi$  ist wegen  $ab = V\{a, b\} T\{a, b\}$  modular. Bezeichnet man daher die Verknüpfung im Modul in diesem Fall durch das Produktzeichen, so ergibt sich aus Satz 2

**Korollar 2b.** Sind  $a_1, \dots, a_n$  beliebige natürliche Zahlen, so ist

$$(7a) \quad V\{a_1, \dots, a_n\} = \prod_J M\{a_i : i \in J\}^{(-1)^{|J|-1}}$$

und

$$(7b) \quad T\{a_1, \dots, a_n\} = \prod_J V\{a_i : i \in J\}^{(-1)^{|J|-1}}.$$

**3. Literatur.** POINCARÉ, GUMBEL, FRÉCHET, LOÈVE, CHUNG u. a. haben Wahrscheinlichkeitsverteilungen untersucht, deren Definitionsbereich von endlich vielen Ereignissen  $A_1, \dots, A_n$  erzeugt wird. Dementsprechend ist (1) Sonderfall und Ausgangspunkt einer ganzen Fülle von Verallgemeinerungen wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur. In [6] wird für additive Mengenfunktionen eine zu (2) analoge Formel auf einem vom obigen verschiedenen Weg bewiesen.

(7a) findet sich bereits in [5].

#### Literaturverzeichnis

- [1] G. BIRKHOFF, Lattice theory. New York 1948.
- [2] K. L. CHUNG, Generalization of Poincaré's formula in the theory of probability. Ann. Math. Stat. **14**, 63—65 (1943).
- [3] M. FRÉCHET, Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants, 1<sup>re</sup> partie. Paris 1940.
- [4] H. HERMES, Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955.
- [5] V. A. LEBESGUE, Introduction à la théorie des nombres. Paris 1868.
- [6] M. LOÈVE, Systèmes d'événements en nombre fini. Univ. Lyon., Sect. A, Sér. 3, **5**, 55—74 (1942).
- [7] H. POINCARÉ, Calcul des probabilités. Paris 1900.

Eingegangen am 4. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Walther Eberl

Wien XIX

Nusswaldgasse 22/A/4/2



## Über eine Klasseneinteilung der zweiecklosen Graphen

Von

GERHARD RINGEL

Ein Graph besteht aus einer Menge von Knotenpunkten und einer Menge von Kanten; beide Mengen sind elementfremd und durch eine Inzidenzbeziehung der folgenden Art verknüpft. Jeder Knotenpunkt inzidiert mit mindestens einer Kante, jede Kante mit einer oder zwei Knotenpunkten. Auch wenn es später nicht immer erwähnt wird, so betrachten wir in dieser Note nur endliche, zusammenhängende, schlingenlose, zweiecklose Graphen  $\mathfrak{G}$ . In  $\mathfrak{G}$  inzidiert somit jede Kante mit genau zwei Knotenpunkten und je zwei Knotenpunkte sind durch höchstens eine Kante in  $\mathfrak{G}$  verbunden. Man kann also jede Kante durch ein ungeordnetes Knotenpunktpaar kennzeichnen. Zwei Graphen  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{G}'$  heißen *isomorph*, wenn die Elemente (Knotenpunkte und Kanten) von  $\mathfrak{G}$  derart eineindeutig auf die Elemente von  $\mathfrak{G}'$  abgebildet werden können, daß die Inzidenzen erhalten bleiben.

Ein Graph  $\mathfrak{G}$  enthalte die Kante  $AB$  und  $BC$ , aber nicht die Kante  $AC$ . Wenn wir die Kante  $BC$  entfernen und die neue Kante  $AC$  einsetzen, erhalten wir einen neuen Graph  $\mathfrak{G}'$ . Wir sagen,  $\mathfrak{G}'$  geht durch eine *Dreieckstransformation* aus  $\mathfrak{G}$  hervor. Zwei Graphen  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{G}^*$  sollen *äquivalent* zueinander heißen, wenn  $\mathfrak{G}$  durch Dreieckstransformationen in einen zu  $\mathfrak{G}^*$  isomorphen Graphen übergeführt werden kann. Natürlich ist dieser Äquivalenzbegriff reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Zwei äquivalente Graphen haben gleiche Knotenpunkt- und gleiche Kantenanzahl, denn bei einer Dreieckstransformation bleiben diese beiden Zahlen ungeändert. In der vorliegenden Note zeigen wir, daß auch umgekehrt *zwei Graphen mit gleich viel Kanten und gleich viel Knotenpunkten äquivalent sind*. Zu diesem Zwecke führen wir jeden Graph mit Hilfe von Dreieckstransformationen in einen ganz bestimmten Normalgraph über und zeigen dann, daß Graphen mit gleich viel Knotenpunkten und gleich viel Kanten zum gleichen Normalgraph, also auch zueinander äquivalent sind. Anschließend wird noch angegeben, wie dieser Normalgraph aus den beiden Anzahlen unmittelbar zu bestimmen ist. Als Anwendung wird noch auf eine Erzeugungsmöglichkeit der Bäume hingewiesen.

**Definitionen und die Normalform.** In einem Graphen  $\mathfrak{G}$  heißt eine Folge  $P_0, P_1, \dots, P_h$  von paarweise verschiedenen Knotenpunkten ein *Weg von der Länge  $h$* , wenn die Kanten  $P_i P_{i+1}$  in  $\mathfrak{G}$  enthalten sind ( $i = 0, 1, \dots, h-1$ ). Wenn  $P_0 = P_h$  ist und sonst die obigen Bedingungen erfüllt sind, so heißt die Folge ein *Kreis* oder ein  *$h$ -Eck*.  $\mathfrak{G}$  ist *zusammenhängend*, wenn je zwei Knotenpunkte durch einen Weg in  $\mathfrak{G}$  verbunden werden können. Wenn  $\mathfrak{G}$  nicht zusammenhängend ist, so besteht er aus mehreren zusammenhängenden Teilgraphen, den sogenannten *Zusammenhangskompo-*

nenten von  $\mathfrak{G}$ . Falls in einem Graph ein Knotenpunkt nur mit einer einzigen Kante inzidiert, so heißt diese Kante eine *Endkante*. Wenn in einem Graph  $\mathfrak{G}$  jeder von den  $n$  Knotenpunkten mit jedem anderen durch je eine Kante verbunden ist, so ist  $\mathfrak{G}$  der *vollständige Graph* mit  $n$  Knotenpunkten. Zwei Knotenpunkte, die mit einer gemeinsamen Kante inzidieren, werden gelegentlich auch als *benachbart* bezeichnet. Wenn  $k$  eine Kante von  $\mathfrak{G}$  ist, so verstehen wir unter  $\mathfrak{G} - k$  denjenigen Graph, der aus allen Kanten  $\neq k$  von  $\mathfrak{G}$  und den mit ihnen inzidierenden Knotenpunkten besteht. Wenn wir aus einem Graph den Knotenpunkt  $H$  und alle mit  $H$  inzidierenden Kanten entfernen, so bezeichnen wir den erhaltenen Graph mit  $\mathfrak{G} - H$ , wobei die eventuell auftretenden isolierten Knotenpunkte auch noch zu tilgen sind. Wenn alle Knotenpunkte eines Graphen  $\mathfrak{G}$  durch je eine Kante mit einem neuen Knotenpunkt  $P \notin \mathfrak{G}$  verbunden werden, so wird der entstandene Graph mit  $(\mathfrak{G}, P)$  bezeichnet.

Es seien  $a, b, c$  drei nichtnegative ganze Zahlen mit

$$(1) \quad 1 \leq b \leq a \quad \text{oder} \quad b = a = 0.$$

Wir definieren den folgenden Graphen  $\mathfrak{H}(a, b, c)$ , der uns später als Normalform dienen wird. Er besteht aus den Knotenpunkten

$$R, P_0, P_1, \dots, P_a, Q_1, Q_2, \dots, Q_c$$

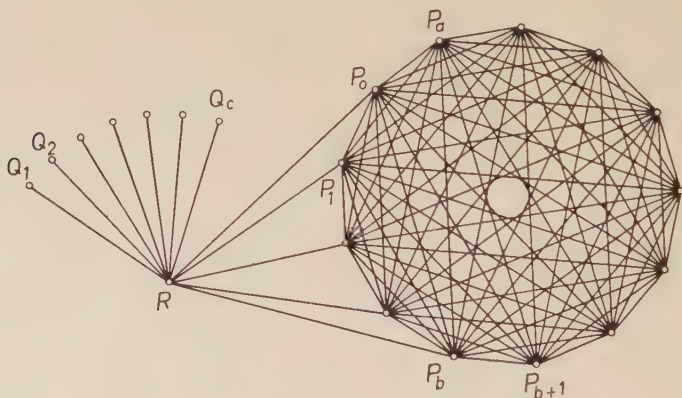
und den Kanten

$$P_i P_j \quad (i, j = 0, 1, \dots, a; i \neq j),$$

$$R P_i \quad (i = 0, 1, \dots, b),$$

$$R Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, c).$$

Das sind im ganzen  $\binom{a+1}{2} + b + 1 + c$  Kanten und  $a + c + 2$  Knotenpunkte.



$\mathfrak{H}(a, b, c)$  besteht also aus einem vollständigen Graphen mit  $a + 1$  Knotenpunkten, einem weiteren Knotenpunkt  $R$ , der mit  $b + 1$  von diesen durch je eine Kante verbunden ist und an den noch  $c$  Endkanten angehängt sind. Falls  $a = b$  ist, so haben wir sogar einen vollständigen Graph mit  $a + 2$  Knotenpunkten und  $c$  zusätzlichen Endkanten vor uns.

**Transformation in die Normalform.** Wir beweisen jetzt

**Hilfssatz 1.** *Zu jedem zusammenhängenden, zweiecklosen, schlingenlosen Graphen  $\mathfrak{G}$  gibt es drei nichtnegative ganze Zahlen  $a, b, c$  mit  $1 \leq b \leq a$  oder  $b = a = 0$ , so daß  $\mathfrak{G}$  äquivalent zum Normalgraphen  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  ist.*

Wenn  $\mathfrak{G}$  nur aus einer Kante besteht, so ist er schon in Normalform, nämlich  $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}(0, 0, 0)$ . Es sei Hilfssatz 1 schon bewiesen für alle Graphen mit weniger als  $n$  Kanten. Wir wollen zeigen, daß dann ein zusammenhängender, zweieckloser, schlingenloser Graph  $\mathfrak{G}$  mit genau  $n$  Kanten auch zu einer derartigen Normalform äquivalent ist.

1. Falls sich  $\mathfrak{G}$  durch Dreieckstransformationen in einen Graph  $\mathfrak{G}_1$  mit einer Endkante  $k$  verwandeln läßt, so ist nach Induktionsvoraussetzung  $\mathfrak{G}_1 - k$  äquivalent zu einem  $\mathfrak{H}(a, b, c)$ . Die hierbei nötigen Dreieckstransformationen kann man aber direkt auch schon in  $\mathfrak{G}_1$  durchführen, wobei die Endkante  $k$  unberührt bleibt. So ist  $\mathfrak{G}_1$  äquivalent zu einem Graph  $\mathfrak{G}^*$ , der aus  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  hervorgeht, indem man an einem bestimmten Knotenpunkt eine Endkante zusätzlich anfügt. Durch Dreieckstransformationen kann man diese Endkante zu jedem anderen Knotenpunkt transportieren. Wir können diese zusätzliche Endkante etwa im Knotenpunkt  $R$  von  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  entspringen lassen. Dann haben wir aber den Graphen  $\mathfrak{H}(a, b, c + 1)$  erhalten, der somit zu  $\mathfrak{G}$  äquivalent ist.

2. Jetzt sei  $\mathfrak{G}$  nicht zu einem Graph mit Endkante äquivalent.  $H$  sei ein Knotenpunkt von  $\mathfrak{G}$ . Falls  $H$  nicht mit allen anderen Knotenpunkten von  $\mathfrak{G}$  benachbart ist, so sei  $S$  ein Knotenpunkt, der zu  $H$  nicht benachbart ist und  $H, S_1, S_2, \dots, S_q, S$  ein kürzester von  $H$  zu  $S$  führender Weg, d. h. die Kanten  $SS_{q-1}, SS_{q-2}, \dots, SS_1, SH$  sind in  $\mathfrak{G}$  nicht vorhanden. Dann lassen sich die folgenden  $q + 1$  Dreieckstransformationen der Reihe nach ausführen:

$$\begin{array}{ll} SS_q & \text{wird durch } SS_{q-1} \text{ ersetzt,} \\ SS_{q-1} & \text{wird durch } SS_{q-2} \text{ ersetzt,} \\ \vdots & \vdots \\ SS_2 & \text{wird durch } SS_1 \text{ ersetzt,} \\ SS_1 & \text{wird durch } SH \text{ ersetzt.} \end{array}$$

Danach ist  $S$  auch noch zu  $H$  benachbart. So wie mit  $S$  kann man dies nacheinander mit jedem noch nicht zu  $H$  benachbarten Knotenpunkt durchführen. Es entsteht ein Graph  $\mathfrak{G}'$ , bei dem jeder Knotenpunkt  $\neq H$  mit  $H$  durch eine Kante verbunden ist.

Falls der Graph  $\mathfrak{G}' - H = \mathfrak{Z}$  nicht zusammenhängend ist, seien  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  zwei Zusammenhangskomponenten von  $\mathfrak{Z}$  und  $X_1$  bzw.  $Y_1$  ein Knotenpunkt aus  $\mathfrak{X}$  bzw.  $\mathfrak{Y}$ . Außerdem sei  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  ein längster Weg in  $\mathfrak{Y}$ , der mit  $Y_1$  beginnt. Wir führen die folgenden  $p$  Dreieckstransformationen aus:

$$\begin{array}{ll} HY_1 & \text{ersetzen durch } X_1 Y_1, \\ HY_2 & \text{ersetzen durch } H Y_1, \\ HY_3 & \text{ersetzen durch } H Y_2, \end{array}$$

$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$   
 $H Y_{p-1}$  ersetzen durch  $H Y_{p-2}$ ,  
 $Y_{p-1} Y_p$  ersetzen durch  $H Y_{p-1}$ .

Der entstandene Graph  $\mathfrak{G}^*$  unterscheidet sich von  $\mathfrak{G}'$  nur dadurch, daß in  $\mathfrak{G}^*$  die Kante  $X_1 Y_1$ , aber nicht mehr die Kante  $Y_{p-1} Y_p$  vorkommt. Die Kante  $H Y_p$  ist keine Endkante, weil  $\mathfrak{G}^*$  nach Voraussetzung keine Endkante hat. Es gibt also noch eine Kante  $Y_p Z$  mit  $Z \in \mathfrak{Y}$ . Dieser Knotenpunkt  $Z$  muß mit einem  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq p-2$ ) identisch sein, sonst könnte man den Weg  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  verlängern, also ist  $\mathfrak{Y}$  auch ohne die Kante  $Y_{p-1} Y_p$  noch zusammenhängend. Alle Knotenpunkte von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  gehören daher zu einer Zusammenhangskomponente von  $\mathfrak{G}^* - H = \mathfrak{Z}$ .

Der Graph  $\mathfrak{Z}^*$  hat somit eine Zusammenhangskomponente weniger als  $\mathfrak{Z}$ . Durch Wiederholung dieses Verfahrens läßt sich also  $\mathfrak{G}'$  in einen Graphen  $\mathfrak{G}''$  überführen, für den  $\mathfrak{G}'' - H = \mathfrak{Z}''$  zusammenhängend ist und  $\mathfrak{G}'' = (\mathfrak{Z}'', H)$  gilt.  $\mathfrak{Z}''$  ist ein zusammenhängender, schlingenloser, zweieckloser Graph, der nach Induktionsvoraussetzung äquivalent zu einem Graphen  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  mit passenden Zahlen  $a, b, c$  ist. Die Knotenpunkte von  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  seien entsprechend mit  $R', P'_0, P'_1, \dots, P'_a, Q'_1, \dots, Q'_c$  bezeichnet. Die Dreieckstransformationen, die  $\mathfrak{Z}''$  in  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  überführen, lassen sich auch unmittelbar in  $\mathfrak{G}''$  ausführen und liefern den Graph  $(\mathfrak{H}(a, b, c), H)$ .

Falls  $c \geq 2$  ist, so ersetzen wir in  $(\mathfrak{H}(a, b, c), H)$  nacheinander

$$\begin{array}{l} Q'_2 H \text{ durch } Q'_2 Q'_1, \\ Q'_2 R' \text{ durch } Q'_2 P'_0, \\ Q'_2 P'_0 \text{ durch } Q'_1 P'_0. \end{array}$$

Dann ist  $Q'_1 Q'_2$  zur Endkante geworden. Also kommt der Fall  $c \geq 2$  gar nicht vor.

Falls  $c = 0$  ist, so stellt der Graph,  $(\mathfrak{H}(a, b, c), H)$  bereits eine gesuchte Normalform, nämlich  $\mathfrak{H}(a+1, b+1, 0)$  dar. Um das zu sehen, braucht man nur die Knotenpunkte neu zu bezeichnen:

$$R = R', \quad H = P_0, \quad P'_0 = P_1, \quad P'_1 = P_2, \dots, \quad P'_b = P_{b+1}, \dots, \quad P'_a = P_{a+1}.$$

Nun sei  $c = 1$ . Dies kann nur eintreten, wenn  $a = b$  ist. Zum Beweis sei im Gegenteil  $b < a$ , also  $P'_a$  nicht benachbart zu  $Q'_1$ . Wir ersetzen in  $(\mathfrak{H}(a, b, c), H)$  die Kante

$$Q_1 H \text{ durch } Q_1 P'_a,$$

dann

$$Q_1 P'_a \text{ durch } R' P'_a.$$

Dabei wird  $Q_1 R'$  zur Endkante entgegen der Voraussetzung. Somit sind in  $(\mathfrak{H}(a, a, 1), H)$  alle Knotenpunkte außer  $Q_1$  paarweise miteinander, und  $Q_1$  zu genau zwei  $(R, H)$  von ihnen benachbart. Also ist  $(\mathfrak{H}(a, a, 1), H)$  ein Graph von der Form  $\mathfrak{H}(a+1, 1, 0)$ .

**Verschiedenheit der Normalformen.** Um zu zeigen, daß zwei verschiedene Normalgraphen  $\mathfrak{H}(a, b, c)$  nicht äquivalent sind, genügt es nachzuweisen, daß die Kanten- oder Knotenpunktanzahl verschieden ist. Diese beiden Anzahlen bleiben ja bei Dreieckstransformationen invariant.



**Hilfssatz 2.** Wenn die beiden Normalgraphen  $\mathfrak{G}(a, b, c)$  und  $\mathfrak{G}(a', b', c')$  gleich viel Kanten und gleich viel Knotenpunkte haben, so ist  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ .

Zum Beweis nehmen wir an, es sei  $a' < a$ . Nach Voraussetzung und Definition ist die Anzahl der Knotenpunkte in beiden Graphen gleich

$$a + c + 2 = a' + c' + 2$$

und die der Kanten gleich

$$\frac{a(a+1)}{2} + b + c + 1 = \frac{a'(a'+1)}{2} + b' + c' + 1.$$

Wenn wir die erste von der zweiten Gleichung subtrahieren, ergibt sich

$$\frac{a(a-1)}{2} + b = \frac{a'(a'-1)}{2} + b',$$

$$a^2 - a + 2b = a'^2 - a' + 2b',$$

$$(a - a')(a + a' - 1) = 2(b' - b).$$

Wegen  $a' < a$  folgt

$$a + a' - 1 \leq 2(b' - b)$$

und weiter

$$2a' \leq 2(b' - b).$$

Nach (1) ist aber  $b' \leq a'$ . Also folgt  $a' = b'$  und  $b = 0$ . Wegen (1) folgt aus  $b = 0$  auch  $a = 0$ , d. h.  $a'$  ist negativ im Widerspruch zu (1).

Also ist  $a = a'$ ; daraus folgt aber sofort auch  $c = c'$  und  $b = b'$ . Die beiden Normalgraphen sind somit isomorph. Durch Hilfssatz 2 ist gezeigt, daß zwei Graphen mit gleicher Knotenpunkt- und Kantenanzahl in dieselbe Normalform übergeführt werden können, also zueinander äquivalent sind.

**Bestimmung der Normalform.** Jeder zusammenhängende, zweiecklose, schlingenlose Graph mit  $n$  Kanten und  $s$  Knotenpunkten läßt sich nach Hilfssatz 1 und 2 in eine eindeutig bestimmte Normalform  $\mathfrak{G}(a, b, c)$  überführen. Die Zahlen  $a, b, c$  sind allein durch  $n$  und  $s$  bestimmt, müssen sich also als Funktionen von  $n$  und  $s$  ausdrücken lassen. Wir behaupten, daß folgende Formeln gelten<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} a &= \left[ \sqrt{2n - 2s + 2} + \frac{1}{2} \right], \\ (2) \quad b &= n - s + 1 - \frac{a(a-1)}{2}, \\ c &= s - a - 2. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (2) haben wir nur zu zeigen, daß der Graph  $\mathfrak{G}(a, b, c)$  mit diesen Zahlen  $a, b, c$  wirklich  $s$  Knotenpunkte und  $n$  Kanten hat und daß (1) gilt.  $\mathfrak{G}(a, b, c)$  hat aber tatsächlich

$$a + c + 2 = s$$

<sup>1)</sup> Gemeint ist immer die positive Wurzel.  $[x]$  bedeutet die größte ganze Zahl  $\leq x$ .

## Knotenpunkte und

$$\frac{(a+1)a}{2} + b + c + 1 - \frac{(a+1)a}{2} + n - s + 1 - \frac{a(a-1)}{2} + s - a - 2 + 1 = n$$

Kanten. Um auch (1) zu zeigen, bemerken wir, daß für zusammenhängende Graphen stets  $n \geq s - 1$  gilt<sup>2)</sup>. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Falls  $n = s - 1$  ist, folgt

$$a = \left[ \sqrt{0} + \frac{1}{2} \right] = 0,$$

$$b = s - 1 - c + 1 - \frac{0 \cdot (-1)}{2} = 0,$$

$$c = s - 2 \geq 0.$$

2. Falls  $n \geq s$  ist, gilt

$$n - s + 1 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{2n - 2s + 2} + \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{2n - 2s + 2} - \frac{1}{2} \right) \leq b$$

und

$$b < n - s + 1 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{2n - 2s + 2} - \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{2n - 2s + 2} - \frac{3}{2} \right),$$

d. h.

$$\frac{1}{8} \leq b \leq \sqrt{2n - 2s + 2} - \frac{3}{8}.$$

Da  $b$  ganz ist, folgt

$$1 \leq b \leq \left[ \sqrt{2n - 2s + 2} - \frac{3}{8} \right] \leq \left[ \sqrt{2n - 2s + 2} + \frac{1}{2} \right] = a.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} c &= s - \left[ \sqrt{2n - 2s + 2} + \frac{1}{2} \right] - 2 = s - \left( \sqrt{2n - 2s + 2} + \frac{1}{2} \right) - 2 \\ &\geq s - \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) - 2 \geq s - 3, \end{aligned}$$

weil  $c$  und  $s$  ganze Zahlen sind. Da es keinen zusammenhängenden, zweiecklosen schlingenlosen Graph mit  $n \geq s$  und  $s \leq 2$  gibt, folgt

$$c \geq 0.$$

In beiden Fällen ist daher die Forderung (1) erfüllt und somit (2) bewiesen. Mit Hilfe von (2) läßt sich z. B. ausrechnen, daß das System der Eckpunkte (als Knotenpunkte) und Kanten eines Dodekaeders äquivalent zu § (5, 1, 13) ist.

**Anwendung auf Bäume.** Unter einem *Baum* versteht man einen zusammenhängenden Graph, der keinen Kreis enthält; natürlich ist ein Baum immer schlingenlos und zweiecklos, denn Schlingen und Zweiecke sind ja Kreise. Es gilt der Satz:

*Ein Baum mit  $n$  Kanten läßt sich durch Dreieckstransformationen in jeden anderen Baum mit  $n$  Kanten überführen.*

<sup>2)</sup> D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1936. Satz 15, IV. Kapitel.

In einem Baum ist nämlich die Anzahl der Knotenpunkte stets um eins größer als die der Kanten<sup>3)</sup>. Zwei Bäume mit  $n$  Kanten haben also auch gleich viel Knotenpunkte und sind somit äquivalent.

---

<sup>3)</sup> Siehe Fußnote <sup>2)</sup>, aber Satz 8 im IV. Kapitel.

Eingegangen am 28. 4. 1961

Anschrift des Autors:

Gerhard Ringel  
Berlin-Nikolassee  
Rolandstraße 13

## Die Konstruktion der Minimalfläche von ENNEPER

Von

WOLFGANG BÜHM

Die Minimalfläche von ENNEPER hat die bekannte, auf Krümmungslinien  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  bezogene Darstellung [1]

$$(E) \quad x = u(3 - u^2 + 3v^2), \quad y = -v(3 - v^2 + 3u^2), \quad z = 3(u^2 - v^2).$$

Die Kurven  $u/v = \text{const}$  bzw.  $u^2 + v^2 = \text{const}$  sind Biegungslinien der Meridiane bzw. Breitenkreise jener Rotationsfläche  $\Phi$ , die auf die Enneperfläche abgewickelt werden kann. Die Tangentialebenen längs der Kurve  $u^2 + v^2 + 1 = 0$  umhüllen eine Schar konfokaler Paraboloiden. Daher besteht die Fokalkurve [2] der Enneperfläche aus den beiden Fokalparabeln<sup>1)</sup>

$$(P_1) \quad x = 4u, \quad y = 0, \quad z = 2u^2 - 1,$$

$$(P_2) \quad x = 0, \quad y = -4v, \quad z = 1 - 2v^2$$

dieser Schar, der u. a. auch das gleichseitige hyperbolische Paraboloid<sup>1)</sup>

$$(P) \quad x = 2u, \quad y = -2v, \quad z = u^2 - v^2$$

angehört.

1. Für die Minimalfläche von ENNEPER hat DARBOUX die folgende Konstruktion angegeben [3]: Die Symmetrieebene  $\sigma$  zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  der Fokalparabeln ist Tangentialebene der Enneperfläche. Der Berührungspunkt  $E$  wird auf ihr durch die beiden Normalebenen  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  der Fokalparabeln in  $P_1$  bzw.  $P_2$  ausgeschnitten. Diese Normalebenen sind die Ebenen der Krümmungslinien durch  $E$ .

2. JONAS konstruiert diese Minimalflächen so [4]: Er fällt von einem Punkt  $P$  des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides das Lot auf die  $z$ -Achse und spiegelt es an der Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloides in  $P$ . Das Spiegelbild ist Tangente  $t$  einer der Kurven  $u/v = \text{const}$  der Enneperfläche. Den Berührungspunkt  $E$  findet JONAS, indem er den Durchstoßpunkt  $D$  von  $t$  mit  $z = 0$  bestimmt und seinen Abstand von  $P$  zweimal über  $P$  hinaus anträgt.

3. Wir wollen diesen beiden Konstruktionen hinzufügen: Spannt man von zwei frei beweglichen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  der Fokalparabeln zwei Fäden nach einem Punkt  $E$  des Raumes, so daß infolge der Fadenspannung die Fäden an den Fokalparabeln

---

<sup>1)</sup> Die Parameter sind so gewählt, daß die im folgenden angegebenen Konstruktionen zur Darstellung (E) führen (vgl. [1] und [4]).





Betrachtet man die beiden Ebenen  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  durch  $f$  und die Normalen  $n_1$  bzw.  $n_2$  der Fokalparabeln in  $P_1$  bzw.  $P_2$ , so ist etwa mit Hilfe des Satzes über die gleichlangen Subnormalen einer Parabel leicht zu zeigen, daß die von einer Ebene  $\varepsilon$  durch  $f$  auf  $z$  und  $n$  ausgeschnittenen Punkte auf verschiedenen Seiten von  $\sigma^*$  und im gleichen Abstand von  $\sigma^*$  liegen. Wenden wir das auf die Ebenen des Büschels durch  $E^*$  und durch  $E$  an, so folgt: Die Ebene durch  $f$  und  $E^*$  trifft  $z$  im Schnitt mit  $\sigma^*$ , d. h. ihr Schnitt  $t^*$  mit  $\sigma^*$  trifft  $z$ . Es ist gezeigt,  $t^*$  ist das Lot von  $P$  auf  $z$ . Damit geht das Spiegelbild  $\delta^*$  der Ebene  $\delta$  beider Fäden durch  $z$  und  $\delta$  selbst durch den Schnitt  $T$  von  $z$  mit  $\tau$ .  $\delta$  schneidet  $n$  in  $E$  und der Abstand von  $E$  und  $\sigma^*$  ist gleich dem Abstand von  $\sigma^*$  und  $T$ , und der ist gleich dem zweifachen Abstand von  $\sigma^*$  und  $z = 0$ . Das ergibt für  $E$  die Konstruktion von JONAS.

6. Eine andere Erzeugung der Minimalfläche von ENNEPER hat K. STRUBECKER gegeben [7], er geht dabei von den Flächen aus, deren Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören und bewirkt die Erzeugung unter Zugrundelegung einer quasi-elliptischen Metrik.

#### Literaturverzeichnis

- [1] L. BIANCHI-LUKAT, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1910, p. 375.
- [2] G. DARBOUX, Sur une classe remarquable . . . Paris 1873, p. 9.
- [3] G. DARBOUX, Surfaces, vol. I. Paris 1914, p. 374.
- [4] H. JONAS, Zur Theorie der  $W$ -Kongruenzen mit ebener Mittelfläche. Math. Nachr. **9**, 1—21 (1953), insbes. p. 20.
- [5] J. C. MAXWELL, On the Cyklides. Quart. J. Math. **9**, 111—126 (1868).
- [6] O. STAUDE, Fokaleigenschaften. Leipzig 1886.
- [7] K. STRUBECKER, Vortrag im Mathematischen Kolloquium der Freien Universität Berlin am 8. 2. 1961 und Eine Erzeugung der Minimalfläche von Enneper. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser., **54**, (1961) (im Druck).

Eingegangen am 10. 5. 1961

Anschrift des Autors:

Wolfgang Böhm  
 Lehrstuhl und Institut für Geometrie  
 Technische Universität Berlin  
 Berlin-Charlottenburg 2  
 Hardenbergstr. 34, EB-103



---

# Soviet Mathematics Doklady

A Translation of all the Pure Mathematics Sections  
of Doklady Akademii Nauk SSSR

The total number of pages of the Russian journal to be translated in 1961  
will be about 1600. All branches of Pure Mathematics  
are covered in the Doklady in short articles  
which provide a comprehensive, up-to-date report of what is going  
on in Soviet mathematics

Six Issues a year Domestic Subscriptions \$ 17.50  
Foreign Subscriptions \$ 20.00  
Single Issues \$ 5.00

Send Orders to



## American Mathematical Society

190 Hope Street, Providence 6, Rhode Island

---

# Elemente der Mathematik

Revue de mathématiques élémentaires

Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

**Redaktion** Dr. L. Locher-Ernst, Prof. am Technikum, Nelkenstraße 4, Winterthur  
Dr. E. Trost, Prof. am Technikum Winterthur, Basteiplatz 3, Zürich 1  
Dr. P. Buchner, Prof. an der Universität, Rektor am Math. Naturw.  
Gymnasium, Realpstraße 71, Basel

Abonnementpreis pro Jahrgang Fr./DM 15. —  
Einzelnummer Fr./DM 3. —

Verlangen Sie kostenlose Probenummern

## Birkhäuser Verlag Basel/Stuttgart

---



# Funktionentheorie in zwei Bänden

Constantin Carathéodory

weiland Professor der Mathematik an der Universität München

Zweite, revidierte Auflage

Band I: 1960 288 Seiten mit 33 Figuren. In Ganzleinen Fr. 27.50 (DM 27.50)

Band II: 1961 194 Seiten mit 73 Figuren. In Ganzleinen Fr. 22.50 (DM 22.50)

## Band I

Der Gebrauch der komplexen Zahlen. Die komplexen Zahlen vom algebraischen Standpunkt aus. Die komplexen Zahlen vom geometrischen Standpunkt aus. Euklidische, sphärische und nicht-euklidische Geometrie. Hilfssätze aus dem Gebiete der Punktmengen und der Topologie. Konvergente Zahlenfolgen und stetige komplexe Funktionen. Kurven und Gebiete. Kurvenintegrale. Die analytischen Funktionen. Die Grundlagen der Theorie. Das Prinzip vom Maximum. Das Poissonsche Integral und die harmonischen Funktionen. Die meromorphen Funktionen. Erzeugung analytischer Funktionen durch Grenzprozesse. Stetige Konvergenz. Normale Familien von meromorphen Funktionen. Potenzreihen. Partialbruchzerlegung und Residuunkalkül. Spezielle Funktionen. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen. Der Logarithmus und die allgemeine Potenz. Die Bernoullischen Zahlen und die Gammafunktion.

## Band II

Grundlagen der geometrischen Funktionentheorie. Die beschränkten Funktionen. Konforme Abbildungen. Die Abbildung des Randes. Die Dreiecksfunktionen und der Picardsche Satz. Funktionen von mehreren Veränderlichen. Konforme Abbildung von Kreisbogendreiecken. Die Schwarzschen Dreiecksfunktionen und die Modulfunktion. Die wesentlich singulären Stellen und die Picardschen Sätze.

Dieses nunmehr in zweiter Auflage vorliegende Lehrbuch stellt den Abschluß des Lebenswerkes des großen Meisters der Funktionentheorie dar. Die vielfältigen Erfahrungen, die der Verfasser als Forscher und Lehrer während eines langen erfolgreichen Lebens sammeln konnte, sind hier in vollem Maße zur Geltung gekommen und haben dem Werk in der Wahl des Stoffes und der Darstellung ein originelles und eigenwilliges Gepräge gegeben. Carathéodorys Buch eignet sich vorzüglich für den Studenten als Lektüre neben einer modernen Vorlesung und bietet auch dem Kenner sachlich und methodisch manches Neue.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung — Obtainable from your bookseller  
Commandes à votre libraire

---

## Birkhäuser Verlag Basel/Stuttgart

---